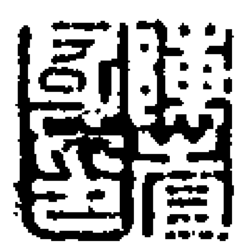
努力進取
常占鰲头

陳省身題



《数学奥林匹克题库》编印出版，我以为将起直接和间接两层作用。

直接作用是：提高我国青少年数学爱好者的解题能力，促进国内数学竞赛活动，有助于我国在国际竞赛中保持优势。

间接作用是：提高我国青少年科学爱好者科学思维能力，促进科学队伍后备力量成长，有助于我国日后四化建设。

吴大任

1990.4.5.

在第三十届国际奥林匹克中学数学竞赛中，我国取得了团体冠军。这是科技领域中具有深远意义的“零的突破”，值得我们热烈欢呼，有充分理由相信今后在科技的其它领域中将会取得越来越多的世界冠军，希望《数学奥林匹克题库》在这过程中将起到它应有的作用。

胡国定 1990年3月10日

前　言

奥林匹克运动作为一种运动，是力量、灵活与美的竞赛；数学奥林匹克作为一种数学竞赛，也是数学上的力量、灵活与美的竞争。

1985年，我国首次派两名高中学生参加国际数学奥林匹克（IMO）这个世界上规模和影响最大的学科竞赛，获得一枚铜牌；1986年，我国派出六名学生组成的代表队，获金牌三枚，银牌和铜牌各一枚；1987年，获金牌、银牌和铜牌各两枚；1988年，获金牌两枚，银牌四枚，总分第二；1989年，获金牌四枚，银牌两枚，总分高居第一，这是亚洲国家第一次获得这项冠军。1990年IMO在我国首都举行。这也是第一次在亚洲国家举行IMO。这些令人瞩目的成绩，一系列振奋人心的消息，激励着我们每个数学工作者和中学生，也将为增强与世界各国人民的友谊，促进我国科学与教育事业的发展，提高民族自信心起到促进作用。

数学奥林匹克越来越成为中学生课外生活中有强大吸引力的活动，我国各地数学奥林匹克学校纷纷建立，各中学校数学课外小组活跃异常，许多还是小学生、初中生就跃跃欲试，渴望以数学竞赛的优异成绩冲向全中国，走向全世界。

在国内，数学竞赛有：华罗庚金杯少年数学邀请赛；全国初中数学联赛；全国高中数学联赛；全国中学生数学冬令营等。在国际上，有国际数学奥林匹克；还有苏联、美国、罗马尼亚、匈牙利等国的数学竞赛。许多数学工作者、学生都想了解竞赛，了

解竞赛的试题，知道这些如何去解。《数学奥林匹克题库》正是应这方面的需求出版的。

《数学奥林匹克题库》汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答。这些竞赛试题构思独特，新颖别致，灵活深邃，内容广，内涵深。解这些题，不仅需较扎实的基础知识和基本技能，也需要灵活的思维和坚强的毅力。因此，常以竞赛题进行训练，就可较快地提高数学水平，对于那些有志于参加数学竞赛的中学生来说，做竞赛题更是不可少的训练环节。

《数学奥林匹克题库》为全国的中学数学教师服务，为全国的数学爱好者服务，为全国的数学奥林匹克服务，为各中学的数学课外小组服务，为支持子女学好数学的家长服务，为一切关心数学奥林匹克运动的人士服务。

目　　录

TABLE OF CONTENTS

关于苏联中学生数学竞赛

苏联是把数学竞赛与奥林匹克运动联系在一起的最早的国家，早在二十世纪三十年代就在一些城市举行了奥林匹克数学竞赛。1961年至1966年举行的第1届至第6届全俄奥林匹克数学竞赛就已经具有全苏的性质，因为除了俄罗斯各州外，苏联大多数加盟共和国都派队参加了。1967年苏联教育部把奥林匹克数学竞赛的主要组织工作承担下来，并成立全苏数理化奥林匹克中央组委会，从这年起，正式命名为“全苏奥林匹克数学竞赛”，每年举行一次，吸收八年级至十年级的学生参加，至1989年已举办了23届。此外，苏联一些加盟共和国和一些城市也举办数学竞赛活动。

本书介绍了第1届至第6届（1961—1966）全俄数学竞赛以及第1届至第23届（1967—1989）全苏数学竞赛的全部试题，每一届试题都注明了举办的时间，并注明各年级的试题号。对1979年以前的各届试题作了比较详细的解答，对1980年以后的试题作了简短的提示。本书主要是根据苏联科学出版社的《*ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД*》(1988年版）译出的，第22届和第23届全苏竞赛则是从其它资料翻译的。

苏联是数学奥林匹克的大国，苏联数学竞赛的试题内容广泛，形式新颖，有些试题虽然解法是初等的，但是题目的本身或者背景已涉及到数学分析，图论，组合论，规划论，数论等分支的一些基本思想和方法。

在本书的后面有一个根据试题内容或解题方法的分类索引，把本书的510道试题分为23类，供读者参考。

试 题 部 分

全俄数学奥林匹克竞赛

第　一　届（1961年）

年级					
8	1	2	3	4	$5_{1)}$
9	$6_{1)}$	7	8	9	10
10	11	12	7	$6_{2)}$	$5_{2)}$

1．已知一图形由16条线段构成（图1）．证明：不能作出穿过每条线段正好一次的折线．（折线可能是不封闭的和自相交的，但它的顶点不能在线段上，而它的边可以通过图形的顶点．）

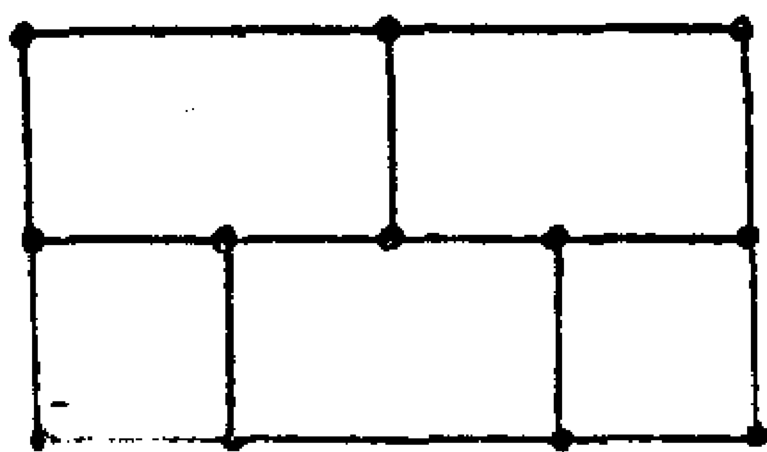


图1

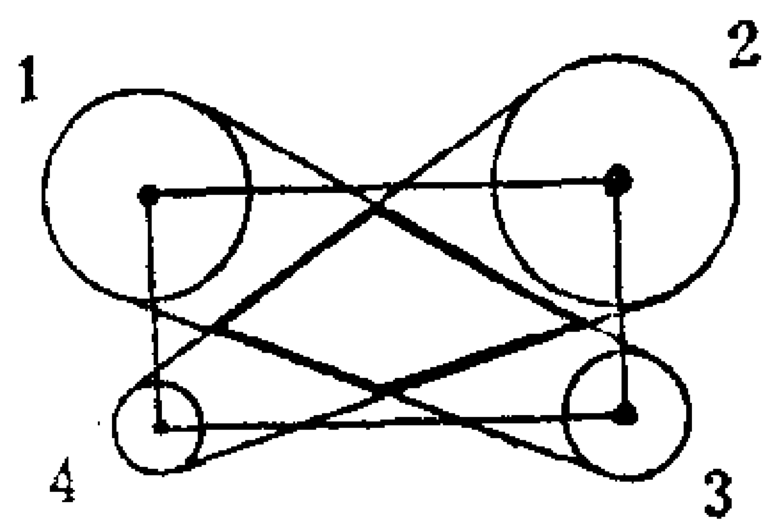


图2

2．以矩形的顶点为中心作半径分别为r_1、r_2、r_3、r_4的4个圆周1、2、3、4，同时$r_1+r_3=r_2+r_4<d$，其中d为矩形的对角线长（图2）．再作圆周1、3与圆周2、4的4条外公切线，证明：由这4条直线所围成的四边形有一个内切圆．

3．证明：在任何39个连续自然数中存在一个自然数，它的各位数字之和能被11整除．

4．有一张 4×4 个格子的表格，在它的某些格子中放着小星星．证明：可以这样来分放7个小星星，使得在划去这张表格的任何两行和任何两列之后，在剩下的格子中总至少有一个小星星．并证明：如果小星星少于7个，那么总能划去两行和两列使剩下的格子都是空的．

5．1）已知一组正数（a，b，c，d），按照以下规则可得到新的数组（ab，bc，cd，da）：每一个数乘以后一个数，第4个数乘以第一个数．按照这个规则还可以得到第三组、第四组等等．证明：在所得的这个数组序列中，除当 $a=b=c=d=1$ 外，不会再次出现（a，b，c，d）．

2）给定任意一由 2^k 个1与－1组成的数组，按照以下规则可以得到新数组：每一个数乘以后一个数，而第 2^k 个数乘以第一个数．又可以按这个规则再得到新的数组，证明：最终能得到全由1构成的数组．

6．1）点 A 和 B 以同样的角速度分别沿着中心在 O_1 和 O_2 的圆周作匀速运动（按顺时针方向）．证明：正三角形 ABC 的顶点 C 也沿着某个圆周作匀速运动．

2）平面上的固定点 P 到等边三角形 ABC 的顶点 A、B 的距离分别为 $AP=2$；$BP=3$，求 CP 的最大值．

7．有一张填满了数的 $m\times n$ 表格，可以同时改变其某一列或者某一行中所有数的符号．证明：多次重复上述运算能使原来的表格变成任何一列以及任何一行的所有数之和为非负数．

8．n 个点被互不交叉的线段所连接，可以从一个点出发沿着这些线段到达其它任何点，同时不存在由两条不同的路径连接起来的两个点．证明这些线段的总数等于 $n-1$．

9．a、b、p 为任意整数．证明：一定能找到互质的两个

数k、l，使$ak+bl$能被p整除．

10．科尼亚和别佳两人分$2n+1$个核桃，$n\geqslant 2$，同时每一个人都想尽可能多得．假设有三种分法（每一种分法有三步）．

第一步：别佳把所有核桃分成两份，每一份不少于两个核桃．

第二步：科尼亚再把每一份分成两份，每一份不少于1个核桃．（第一步、第二步对于三种方法都一样．）

第三步：在第一种方法中科尼亚取最多的那一份和最少的那一份；在第二种方法中科尼亚取两份中等的；在第三种方法中科尼亚或者取最多的与最少的两份，或者取两份中等的，但是按规则他要送给别佳一个核桃．

试确定：哪种方法对科尼亚最有利，哪种方法对他最不利？

11．证明：在任意3个自然数无穷数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$$

$$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$$

中一定能找到下标p和q，使$a_p\geqslant a_q$，$b_p\geqslant b_q$，$c_p\geqslant c_q$．

12．120个边长为1的正方形放在边长分别为20和25的矩形中．证明：可以把直径为1的圆放到矩形中去，使它和任何正方形不相交．

第 二 届（1962年）

年级					
8	13	14	15	16	17
9	18	19	20	21	17
10	22	23	24	25	26

13．在凸四边形$ABCD$的四条边AB、BC、CD和DA的延长

线上取点A'、B'、C'、D'，使$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DA}$。证明：四边形$A'B'C'D'$的面积是四边形$ABCD$面积的5倍。

14．在平面上给定圆周S和经过圆周S中心O的直线l。过点O任意作一圆周S′，其中心在直线l上。求圆周S和S′的公切线与圆周S′的切点M之集合。

15．给定正整数a_0，a_1，a_2，…，a_{99}，a_{100}，且已知：$a_1>a_0$，$a_2=3a_1-2a_0$，$a_3=3a_2-2a_1$，…，$a_{100}=3a_{99}-2a_{98}$。证明：

$$a_{100}>2^{99}.$$

16．证明：不存在整数a、b、c、d，使得表达式ax^3+bx^2+cx+d当$x=19$时值为1，而当$x=62$时值为2。

17．在$n\times n$的正方形表格中任意地填上1或者-1，n为奇数。在每一列的下面写上这一列中所有数的乘积，而在每一行的右边写上这一行中所有数的乘积。证明：所写的$2n$个乘积的和不等于零。*

18．已知两条边求作一个三角形，使得这两条边的中线相交成直角。

19．a、b、c、d是乘积为1的4个正数。证明：

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant 10$$

20．给定正五边形，M是其内部（或边界上）的任意点。从点M到五边形各边的距离（或到各边延长线的距离）按照依次增大的次序编号：$r_1\leqslant r_1\leqslant r_3\leqslant r_4\leqslant r_5$。求使$r_3$取最小值的点$M$的所有位置；并求出使$r_3$取最大值的点$M$的所有位置。

21．任取一个能被9整除的1962位的数，它的各位数字之和记为a，a的各位数字之和记为b，b的各位数字之和记为c。问：c等于多少？

---

* 对8年级假设$n=25$。

22．从等腰三角形ABC的底边AC上的中点M作BC边的垂线MH，点P为线段MH的中点，证明$AH\perp BP$。

23．一个三角形的三条边a、b、c之间有下列关系：

$$0\leqslant a\leqslant 1\leqslant b\leqslant 2\leqslant c\leqslant 3,$$

那么三角形的最大面积等于多少？

24．x、y、z是两两不相等的整数．证明：
$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$能被$5(y-z)(z-x)(x-y)$整除．

25．已知：数a_0、a_1、…、a_n满足$a_0=a_n=0$，且对一切k（$k=1, 2, \cdots, n-1$）有$a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\geqslant 0$。
证明：所有a_k非正。

26．给定正数a_1、a_2、…、a_m，b_1、b_2、…、b_n，且
$a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$。
证明：可以把至多$m+n-1$个正数放到m行n列的空表格中去，使得第i行的一切数之和等于a_i，而第k列的一切数之和等于b_k。

第 三 届（1963年）

年级					
8	27	28	$29_{1)}$	30	$31_{1)}$
9	32	33	34	$31_{2)}$	28
10	35	36	37	$29_{2)}$	28
11	38	28	39	40	$29_{2)}$

27．已知五个圆周中的任意四个经过同一点．证明存在一个点，使得五个圆周都经过这个点．

28．8个人参加国际象棋循环赛，规定胜者得1分，平者得0.5分，输者得0分．已知他们的得分不同．取得第二名的棋手

的得分是后四名棋手得分的总和．问：第三名棋手和第七名棋手之间的比赛结果如何？

29．1）凸四边形$ABCD$的每条对角线都等分它的面积．证明$ABCD$是平行四边形．

2）给定一凸六边形$ABCDEF$，且已知：对角线AD、BE和CF都等分它的面积．证明这些对角线都相交于一点．

30．自然数a和b互质．证明：$a+b$与a^2+b^2的最大公约数等于1或2．

31．A、B两点是圆周上的定点，而点M是圆周上的动点．从线段MB的中点K作直线MA的垂线KP．

1）证明：所有直线KP都经过同一个点．

2）求点P的集合．

32．给定边长为1的等边三角形．求最小的d，使长度为d的线段在它的两端点沿着三角形的各边滑动时，它的轨迹能覆盖整个三角形．

33．尺寸6×6的棋盘由18个尺寸为2×1的多米诺骨牌所覆盖（每一个骨牌盖着两个格子）．证明：在任何一种那样的覆盖中总可以把棋盘沿着水平方向或垂直方向剪为两部分，而不影响任何一个骨牌．

34．给定n个不同的正数a_1、a_2、…、a_n，用它们组成一切可能的和（分别有1至n个加数）证明：在这些和中至少存在$n(n+1)/2$个两两不同的数．

35．在三角形ABC中作角A、B的角平分线，然后从顶点C作这些角平分线的平行线，再连结它们的交点D、E．已知直线DE平行于直线AB．证明：三角形ABC是等腰三角形．

36．给定一无穷算术级数，它的每一项都是正整数，且其中一项是完全平方数．证明：这个级数有无穷多个完全平方数．

37．给定一正45边形．问：能否把0、1、…、9这10个数字

放到它的顶点上，使得对于任何两个不同的数字都存在一条边，这条边的两端点用这两个数字标号.

38．求实数a、b、p、q，使等式

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

对于任何x成立.

39．在圆周的一直径的两端上标着数字1，把所得的每一个半圆周再等分，并在两条弧的分点写上其端点上的数字之和（第一步）．然后再等分所得到的4条弧，并在它们的分点写上其端点的数字之和（第二步）．共进行了n次．求所写出的一切数字之和.

40．在等腰三角形内求这样的点集：从这些点到底边的距离等于它们到两腰距离的几何平均值.

第 四 届（1964年）

年级					
8	41	42	43	44	45 1)
9	41	46	47	48	49
10	50	51	45 1)、2)	52	53
11	54	55	52	53	44

41．已知：三角形中两条边的高不小于这两条边．求三角形的内角.

42．证明：$m(m+1)$不是任何整数的幂，其中m为自然数.

43．对1至1000000000，求每一个数的各位数字之和；再对所得的10亿个数，求每一个数的各位数字之和，…，直到得到10亿个一位数为止．问：所得的数中1多还是2多？

44．给定任意一组n个整数a_1、a_2、…、a_{2k+1}，由它可得到

新的一组：

$\frac{a_1+a_2}{2}$、$\frac{a_2+a_3}{2}$、…、$\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$、$\frac{a_n+a_1}{2}$；由这一组按照同一规则又可得到新的一组，…．证明：如果所得数都是整数，则所有初始数都相等．

45．1）在凸六边形$ABCDEF$中所有角都相等，证明：$AB-DE=EF-BC=CD-FA$．

2）反过来证明：由长度分别为a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6且满足条件$a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$的六条线段可以作成一个各个内角都相等的凸六边形．

46．求方程：

$$\sqrt{\underbrace{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}}_{1964}}=y$$

的整数解．

47．从凸四边形$ABCD$的顶点作它的对角线的垂线．证明：由垂足构成的四边形与原四边形相似．

48．求使$(n-1)!$不能被n^2整除的一切奇自然数n．

49．在平面上有一个由边长为1的正六边形构成的网格（图3）．昆虫在网格线上从结点A沿着长度为100的最短路径爬到结点B．证明：在甲虫爬行过程中有一半的路程爬行的方向相同．

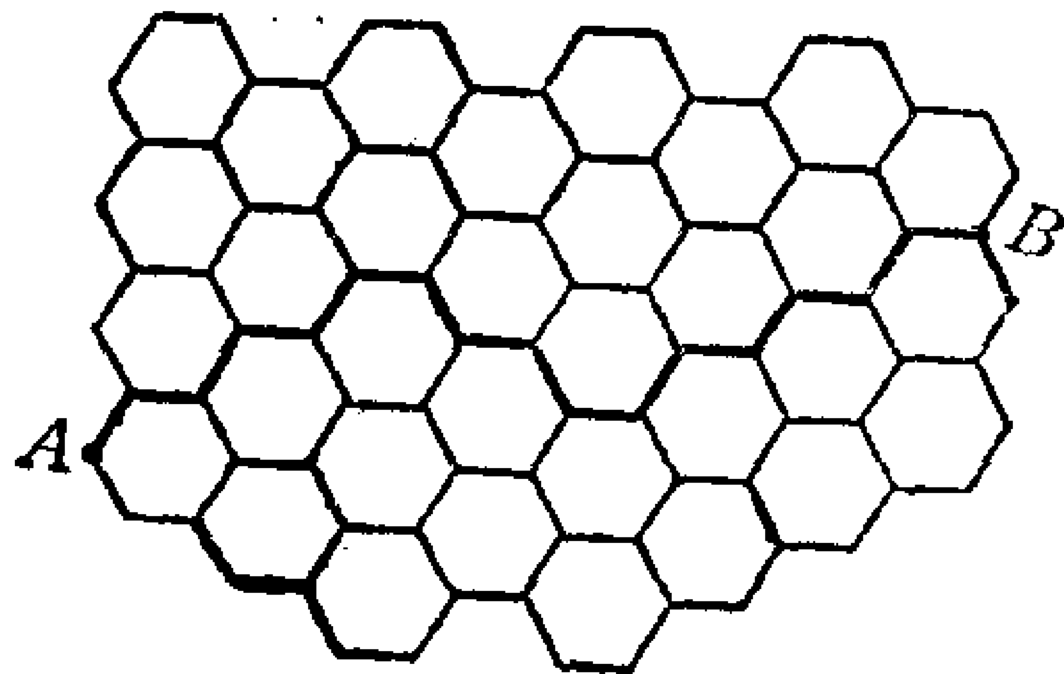


图3

50．四边形$ABCD$是圆O的外切四边形．证明：角AOB与角COD之和等于180°．

51．a、b及n是固定的自然数，且对任何自然数k（$k\neq b$），$a-k^n$能被$b-k$整除。证明：$a=b^n$。

52．在表示式$x_1:x_2:\cdots:x_n$中用加括号来指出运算次序，其结果可记为分数形式：

$$\frac{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}}{x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{n-k}}}$$

（同时，x_1、x_2、…、x_n中的每一个字母可能在分子上，也可能在分母上。）

问：用一切可能的办法加括号能得到多少个不同的分数？

53．把立方体分成互不重叠的四面体。问：这样的四面体最少有多少个？

54．求最大的完全平方数．已知：这样的完全平方数在减去它的最后两位数字后仍然是一个完全平方数（假设所减的数字不全为0）。

55．四边形$ABCD$是一圆周的外切梯形，E是对角线AC、BD的交点，r_1、r_2、r_3、r_4分别是三角形ABE、BCE、CDE、DAE的内切圆的半径．证明：

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}.$$

第 五 届（1965年）

年级					
8	$56_{1)}$	57	58	59	60
9	61	62	63	64	65
10	$56_{2)}$	66	$67_{1)}$	$68_{1)}$	69
11	63	$67_{2)}$	70	$68_{2)}$	71

56．1）n个互相独立的数x_1、x_2、…、x_n分别取值1、0或—1．求这n个数的两两乘积之和的最小值．

2）求绝对值不超过1的n个数的两两乘积之和的最小值．

57．有3×3个格子的棋盘和9张大小为一个格子的卡片，在这些卡片上各写着一个数．两个人轮流把这些卡片放到棋盘格子里去．在所有卡片放完之后，第一个人计算最上一行与最下一行中6个数之和，第二个人计算最左一列和最右一列中6个数之和．和数较大者取胜．证明：当第一个人采取正确策略时，不管卡片上写了些什么数第二个人都不可能赢．

58．给定一圆内接三角形ABC，连结弧AC的中点与弧AB、BC的中点之弦与AB、BC分别相交于D、E两点．证明：线段DE平行于边AC并且经过三角形ABC的内切圆的中心．

59．公共汽车票的号码是六位数，如果号码的前三位数字之和等于后三位数字之和，则称有这个号码的票是“幸运”的．证明：所有幸运票的号码之和能被13整除．

60．在一座小岛上有一盏探照灯，其光柱照射长度为a的海面区间（图4）．当探照灯绕着垂直轴旋转时，其光柱末端的速度为v．证明：最大速度为$v/8$的汽艇驶近岛屿时必定被发现．

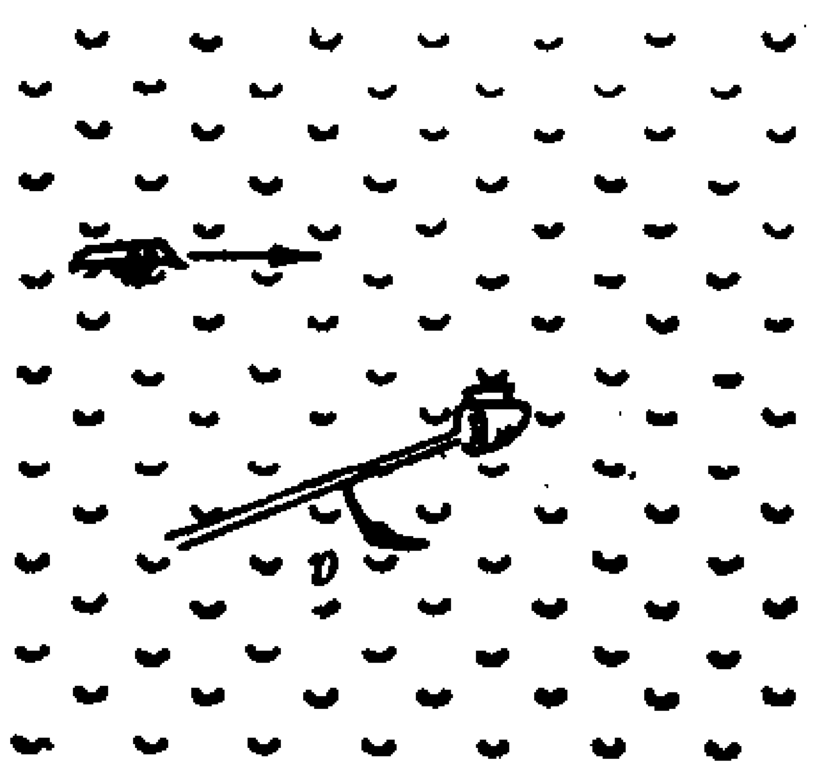


图4

61．有100个民兵，每天晚上三个人值班．证明：不能排出使两个人恰好一起值一次班的值班表．

62．给定一周长为$2p$的三角形．平行于三角形的底且与内切圆相切的直线被三角形的两腰所截得到一条线段，求这条线段的最大长度．

63．n^2个数x_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）满足下面n^3个方程：

$$x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=0\ (i, j, k=0, 1, \cdots, n).$$

证明：存在数a_1、a_2、…、a_n，使对任何i、j有$x_{ij}=a_i-a_j$。

64. 能否把1965个点放到边长为1的正方形中，使得面积为1／200、边平行于正方形之边的任何矩形内部至少含有一个这样的点？

65. 用两个最相邻的整数之一来取代一个数，称为四舍五入。

给定n个数。证明：可以这样来把它们四舍五入，使任意m（$1\leqslant m\leqslant n$）个已四舍五入的数之和与这m个未四舍五入时的数之和的差不超过（$n+1$）／4。

66. 坐火车来到莫斯科的一游客成天逛大街。在某广场的一家咖啡店吃完晚饭后，他决定返回车站，并且只沿着他曾经奇数次走过而来到此地的马路步行。证明：他总能做到这一点。

67. 1）某一委员会开了40次会，每一次出席者10人，并且任意两位委员同时出席会议不多于1次。证明：委员的数目多于60。

2）证明：不可能把25个人编成多于30个的5人委员会，使任何两个委员会没有一个以上的公共成员。

68. 给定两个正质数p、q。整数n如果能表示成$n=px+qy$的形式，其中x、y为非负整数，则称n是"好的"；在相反的情形，则称n是"坏的"。

1）证明：存在整数c，使整数n与$c-n$中始终一个是好数，一个是坏数。

2）坏的非负数共有多少个？

69. 侦察机沿着中心在点A的圆周飞行，圆周的半径等于10公里，飞机的速度为1000公里／小时。在某一时刻从点A发射出火箭，其速度等于飞机的速度，而且火箭始终被控制在连结飞机和点A的直线上。问：火箭发射后经过多少时间能追上飞机？

70. 证明：多面体的所有棱长之和大于$3d$，其中d为最远顶

点之间的距离。

71．在形状为球形的一行星上住着一位居民，他可以在行星表面以不超过u的速度运动．一个速度为v的宇宙飞船飞近这个行星．证明：如果$v/u>10$，那么不管居民躲藏到何处总能从飞船上看到它。

第 六 届（1966年）

年级					
8	72	$73_{1)}$	74	$75_{1)}$	76
9	77	$73_{2)}$	$75_{2)}$	78	79
10、11	$75_{2)}$	80	81	82	83

72．在某个星系的每个行星上有一个天文学家观察最近的一个行星，行星之间的距离两两不相等．证明：如果行星有奇数个，那么就存在一个任何人都观察不到的行星．

73．1）点B、C在线段AD的内部．证明：如果AB等于CD，那么对于平面上的任何点P有$PA+PD\geqslant PB+PC$。

2）在平面上给定点A、B、C和D．已知，对于任何点P有$PA+PD\geqslant PB+PC$。证明：点B、C在线段AD上且$AB=CD$。

74．是否存在自然数x、y，使x^2+y与y^2+x是整数的平方？

75．1）8年级学生站成一排，他们每个人面前站着一个身材矮些的7年级学生．证明：如果把8年级学生和7年级学生都重新按高矮排列，那么每一个8年级学生仍然比站在他面前的7年级学生要高。

2）一群战士站列成一矩阵，且在每一行中战士按高矮排列．证明：如果在每一列中，战士也重新按高矮排列，那么在每一行中的战士仍然按高矮排列着．

76. 在方格纸上画着一矩形$ABCD$，它的边在方格线上，而且AD是AB的k倍（k是整数）. 考察方格线上A、C两点之间的所有可能的最短路径. 证明：在这些最短路径中，第1条边在AD之上的路径的数量是第1条边在AB之上的k倍.

77. 数a_1，a_2，…，a_n满足条件：$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 2a_1$，$a_2\leqslant a_3\leqslant 2a_2$，…，$a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$. 证明：在和$S=\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n$中可以选择符号，使$0\leqslant S\leqslant a_1$.

78. 证明：可以把半径为S/P的圆放入面积为S、周长为P的凸四边形中去.

79. 在某座城市里对于任意3个十字路口A、B、C都有从A通向B且不经过C的路. 证明：从任意一个十字路口到其它任意一个十字路口至少有两条不相交的路（十字路口是至少有两条路相交的地方；在这种城市中十字路口不少于两个）.

80. 给定三角形ABC. 考察一切可能的四面体$PABC$，它们的最小顶高是PH(H是点P对平面ABC的投影). 求点H的集合.

81. 在一平面上给定100个点. 证明：可以用若干不相交的圆来覆盖它们，这些圆的直径之和小于100，而且任何两个圆之间的距离大于1.（两个不相交圆之间的距离是它们的两个最近点之间的距离.）

82. A、B两点相距d公里. 从这两点同时在一秒之内观察作匀速直线运动的飞机（图5）. 从点A报告说，在这段时间内飞机移动了α度角，而从点B报告说，飞机移动了β度角（α和β都是锐角）. 求飞机的最小速度.

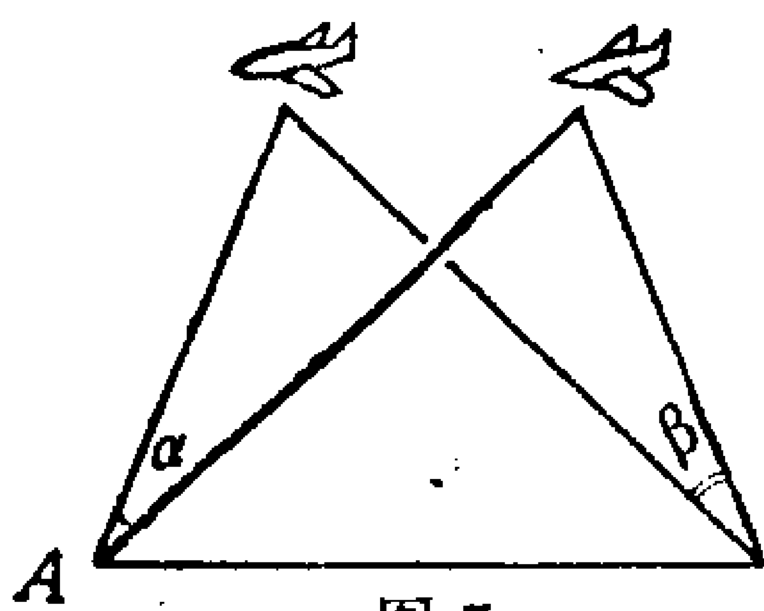


图5

83. 在纸上写好了20个数：1，2，…，20. 两个人轮流把符号“+”或“-”放到这些数之前（符号可以放在任何一个数之前，但不得重复）. 第一个人力求在放完20个符号之后所得和的绝对值尽可能小. 求第二个人能得到的和的最大绝对值.

全苏数学奥林匹克竞赛

第 一 届（1967年）

年级					
8	$84_{1)}$	$85_{1)}$	$86_{1)}$	87	88
9	$87_{2)}$	$88_{1)}$	$86_{2)}$	$84_{2)}$	88
10	90	$86_{2)}$	91	92	93

84. 1）在锐角三角形ABC中最长的高AH等于中线BM. 证明：角ABC不大于$60°$.

2）在锐角三角形ABC中高AH既等于中线BM，又等于角平分线CD. 证明：三角形ABC是等边三角形.

85. 1）任意重排某一自然数的所有数字. 证明：所得数与原数之和不等于$\underbrace{999\cdots9}_{1967\text{个}}$.

2）重排某一数的所有数字，并把所得数与原数相加. 证明：如果这个和等于10^{10}，那么原数能被10整除.

86. 1）一座探照灯能照亮$90°$角的范围. 证明：在平面中任意4个点上的4座探照灯能照亮整个平面.

2）在空间的8个点上各放着一座探照灯，每个探照灯能照亮一卦限的范围（具有三条互相垂直的棱的三面角）．证明：这些探照灯能照亮整个空间．

87．1）能否把0,1,2,…,9这10个数分放到圆周上，使任何两个相邻数之差等于3、4或5？

2）能否把1,2,…,13分放到圆周上，使任何两个相邻数之差等于3、4或5？

88．证明：存在能被5^{1000}整除且在其中不包含数字0的数．

89．求满足条件　$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$的所有整数x、y．

90．在正整数数列中，从第三项开始的每一项都等于前两项之差的绝对值．如果每一项都不超过1967，那样的数列最多有多少项？

91．在尺寸是1000×1000的棋盘上有一个黑王和499个白车．证明：在任意摆定最初位置之后，无论白车怎么走，黑王总能受到它们的进攻（采用国际象棋通常的走法）．

92．菱形的三个顶点依次在边长为1的正方形的三条边AB、BC、CD上．求由菱形的第4个顶点填满的图形之面积．

93．自然数k具有性质：如果n被k整除，那么，由n的数字按相反次序写成的数也能被k整除．证明：k是99的因子．

第　二　届（1968年）

年级	笔试部分					口试部分				
8	94	95	96	97	98	$105_{1)}$	106	107	108	109
9	99	100	101	97	102	110	111	$105_{1)}$	108	109
10	103	95	104	97	96	$105_{2)}$	112	113	114	108

94．八边形的所有内角都相等，而边长是整数．证明：八边

形的对边相等。

95. 比较31^{11}与17^{14}的大小。

96. 在每格边长为1厘米的方格纸上画着一半径100厘米的圆周，这个圆周不经过格子的顶点，而且不与格子边相切。这个圆周可能穿过多少个格子？

97. 在考进人民友谊大学的学生中，正好50人懂英语，50人懂法语，50人懂西班牙语。证明：大学生能分成5组（每组人数不一定相等），使得在每一组中正好有10个懂英语的人，10个懂法语的人，10个懂西班牙语的人（假设某些大学生不懂上述任何一种语言，或者懂其它任何一种语言）。

98. 证明恒等式

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}=11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right).$$

99. 正n边形中（$n>5$）最长对角线与最短对角线之差等于它的边长。求n。

100. 数列a_1，a_2，a_3，…满足条件：

$$a_1=1,\ a_2=a_1+\frac{1}{a_1},\ \cdots,\ a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}.$$

证明：$a_{100}>14$。

101. 设O为锐角三角形ABC内部的一点，而O'为锐角三角形$A'B'C'$内部的一点。从点O引垂线：使OA_1垂直于BC、OB_1垂直于CA、OC_1垂直于AB。同样从O'引垂线：使$O'A_1'$垂直于$B'C'$、$O'B_1'$垂直于$C'A'$、$O'C_1'$垂直于$A'B'$。已知：$OA_1 /\!/ O'A'$、$OB_1 /\!/ O'B'$、$OC_1 /\!/ O'C'$以及$OA_1\cdot O'A'=OB_1\cdot O'B'=OC_1\cdot O'C'$。证明：$O'A_1' /\!/ OA$、$O'B_1' /\!/ OB$、$O'C_1' /\!/ OC$以及$O'A_1'\cdot OA=O'B_1'\cdot OB=O'C_1'\cdot OC$。

102. 证明：任何不超过$n!$的自然数至多可以表示为n个数之和，而这些数中的任何两个都不相等，并且每个数都是$n!$的因子。

103. 在三角形ABC的边AB上取点D，在AC边上取点E，且已知$DE /\!/ BC$，$AD=DE=AC$，$BD=AE$. 证明：BD之长等于半径为$R=AC$的圆内接正十边形的边长.

104. 以四面体$ABCD$的棱AB、AC、AD为直径分别作球. 证明：这些球覆盖四面体$ABCD$.

105. 1）如图6，在4×4的正方形表格的格子中放着符号"+"、"−". 可以同时改变一行中、一列中或者平行于对角线的直线中所有格子内的符号（特别，可以改变正方形角上格子内的符号）.

证明：无论改变多少次符号，表格中的符号不可能全变成正号.

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

图6

2）在8×8的棋盘中一个非角上的格子内放着负号，而在其余的所有格子中放着正号. 可以同时改变某一行、某一列、或某一对角线中所有格子内的符号（特别，可改变角上格子内的符号，对角线是象走的路线）.

证明：无论怎么改变符号，总不能得到全是正号的棋盘.

106. 三条中线把三角形ABC分成6个三角形. 已知：这些三角形的内切圆中有4个相等. 证明：三角形ABC是等边三角形.

107. 证明：对于无穷多个素数p，方程 $x^2+x+1=py$ 有整数解(x, y).

108. 在20个花样滑冰运动员表演之后，9个裁判给运动员排出1至20的名字. 已知：不同裁判给每个运动员排的名次上下相差不超过3. 计算每一个运动员得到的名次之和，并把它们按递增的顺序排列：$C_1 \leqslant C_2 \leqslant C_3 \leqslant \cdots \leqslant C_{20}$. 求$C_1$的最大值.

109. 已知：数a_1、a_2、…、a_n分别为1、1/2、1/3、…、$1/n$之一；同样b_1、b_2、…、b_n也分别为1、1/2、1/3、…、$1/n$之一. 此外，还已知

$$a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2 \geqslant a_3+b_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n+b_n.$$

证明：对于满足$1 \leqslant m \leqslant n$的一切$m$，有$a_m+b_m \leqslant 4/m$.

110. 在讲桌上放着天平，天平盘子上砝码的重量不一定相同，而且在每一个砝码上都写上了一个或数个学生的名字。学生进教室时就把写有自己名字的砝码放到另一个天平盘中去。证明：可以让那些学生进教室，这些学生在重摆自己的砝码后，较重的盘子不是重摆前较重的那个盘子。

111. 一城市设计成分为若干方格的矩形形状：n条街道互相平行，另外m条与它们相交成直角。警察在城市的街道上（不是在十字路口）值勤。每个警察报告从他身旁开过去的公共汽车的号码、运行方向以及通过的时间。为了能根据警察提供的数据同时再现沿着闭合线路（即不重复通过同一地段的线路）行驶的任何公共汽车的路线，至少需要多少个警察在马路上值勤？

112. 三角形ABC的内切圆与AC相切于K。证明：连接AC边的中点与内切圆中心的直线等分线段BK。

113. 数列a_1，a_2，…，a_n满足条件：

$a_1=0$，$|a_2|=|a_1+1|$，$|a_3|=|a_2+1|$，…，$|a_n|=|a_{n-1}+1|$。

证明：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant-\dfrac{1}{2}$

114. 给定一凸四边形，它的所有边及对角线的长度都是有理数。设O为对角线的交点，证明：线段AO的长度是有理数。

第 三 届（1969年）

年级	第一天			第二天		
8	115	116	117	122	123	124[1]
9	118	119	115	124	125	126
10	119	120	121	125	126	128

115. 在梯形$ABCD$的底边AD上有一点E，使三角形ABE、BCE、CDE的周长相等. 证明：$BC=AD/2$.

116. 在形状为正方形的地中央有一条狼，而在正方形顶点上是4条狗. 狼可以在整块地上跑来跑去，而狗只能沿正方形的边界跑. 已知：狼能咬死一条狗，以及两条狗可以咬死一条狼. 每条狗的最大速度是狼的最大速度的1.5倍. 证明：这些狗可以不让狼逃出正方形.

117. 给定0和1的有限数列，它具有性质：

1）如果在数列的某一处连续抽出5个数字并且在另外任何一处同样也连续抽出5个数字，那么这些5个数字将不相同（它们可以重叠地连接在一起，例如0110101）.

2）如果把数字0或者1添加到数列的右边，那么性质1）不再成立.

证明：这个数列的前4个数字与后4个数字相同.

118. a、b、c、d为正数. 证明：下列三个不等式中至少一个不成立，

$$a+b<c+d$$
$$(a+b)(c+d)<ab+cd$$
$$(a+b)cd<ab(c+d).$$

119. 已知a为自然数，以a为首项系数的整系数的二次三项式有两个小于1的不等的正根. 求a的最小值.

120. 给定自然数n，考虑形式为$\frac{1}{pq}$的一切分数，其中p、q互质，$0<p<q\leqslant n$，$p+q>n$. 证明：所有那样分数之和等于1/2.

121. 给定空间的n个点，其中的任意三个点都是一个内角大于120°的三角形的顶点. 证明：可用字母A_1、A_2、…、A_n来表示这些点，使得每个角$A_iA_jA_k$都大于120°，$1\leqslant i<j<k\leqslant n$.

122. 四个首位数字相同的三位数互不相等，且具有性质：它们的和能被它们之中的3个数整除. 求这4个数.

123. 某个国家建立了这样的航空网：任何一个城市至多与其它3个城市有航线，同时从一个城市到达其它任何一个城市只需至多一次换乘.

问：这个国家最多有多少个城市？

124. 考虑边长都相等的凸五边形.

1）证明：在它的最长对角线的内部存在一个点，这个点对各边的张角不超过90°

2）证明：以它的5条边为直径所作的5个圆不能完全覆盖这个五边形.

125. 在黑板上写着方程

$$x^3+\cdots x^2+\cdots x+\cdots=0.$$

两个人做游戏：第一个人把异于0的整数（正整数或负整数）填到其中的任一个空上，接着第二个人把整数填到其余的一个空上，最后第一个人把一个整数填到最后的空上.

证明：不管第二个人填什么数，第一个人总能使所得方程的三个根都是整数.

126. 20个足球队参加全国足球冠军赛. 问：应该至少进行多少场比赛，才能使得任何三个队中有两个队彼此比赛过？

127. h_k是圆内接正k边形的边心距，且这个圆的半径为R. 证明：

$$(n+1)h_{n+1}-nh_n>R.$$

128. 证明：对于任何正数a_1、a_2、…、a_n，有不等式

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}.$$

第　四　届（1970年）

年级	第一天					第二天		
8	129	130	131	132	133 1)			
9	134	135	133 2)	136	137			
10	138	139	133 2)	136	140	141	142	143

129. 给定一直径为AB的圆周以及这条直径上的点C。试在圆周上作两个关于直径AB对称的点X、Y，使直线YC垂直于直线XA。

130. 证明：如果三个正数的乘积等于1，而且这些数的和严格大于它们的倒数之和，那么这三个数之中正好有一个数大于1.

131. 在凸多边形中可能有多少条边的长度等于最长对角线的长度？

132. 把一个十七位数的所有数字按相反次序写出而得到一个新数，再把这个数与原数相加。证明：所得和中至少有一个数字是偶数。

133. 1）一座城堡设计成边长为100米的等边三角形，它被分成100个等边三角形的厅，厅的每面墙长10米，且在厅之间的每面墙的中部都装了门。证明：如果一个人想走遍整个城堡，且进入每个厅至多一次，那么它能参观的厅不多于91个。

2）把正三角形的每一边都k等分，经过分点作平行于各边的直线，结果三角形被分成k^2个小三角形。把一系列小三角形称为“链”，如果每一个小三角形与它前面的小三角形有公共边，而且每个小三角形不出现两次。

问：在一条链中最多能有多少个小三角形？

134. 有五条线段，其中任意三条可构成一个三角形。证明：

这些三角形中至少有一个是锐角三角形。

135．在锐角三角形ABC中角平分线AD、中线BM和高CH相交于一点。证明：角BAC大于45°。

136．用1和2组成5个n位数，使得每两个数中恰好在m个数位上的数字相同，但是所有5个数在任何数位上的数字都不相同。证明：

$$\frac{2}{5}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant\frac{3}{5}.$$

137．证明：从200个整数中可以选出100个，使这100个数的和能被100整除。

138．在三角形ABC中过BC边的中点M和这个三角形内切圆的中心O作直线MO，MO交高线AH于E。

证明：线段AE与内切圆的半径相等。

139．证明：对于任意自然数k，存在无穷多个不含数字0的自然数t（十进制记数法），使得t与kt的数字和相同。

140．两个全等矩形的边相交于8个点。证明：这两个矩形公共部分的面积大于每个矩形面积的一半。

141．在每张卡片上各写着从11111到99999的五位数，然后把这些卡片按任意顺序摆成一排。

证明：所得到的444445位数不可能是2的幂。

142．把至多n个数字（十进制记数法）的一切自然数分为两组：数字和为奇数的是第一组，数字和为偶数的是第二组。

证明：如果$1\leqslant k<n$，那么第一组中所有数的k次幂之和等于第二组中所有数的k次幂之和。

143．把正n边形的每个顶点涂上一种颜色，使具有同一颜色的点是正多边形的顶点。

证明：在这些多边形中有两个全等。

第 五 届（1971年）

年级	第一天					第二天		
8	144	145₁₎	146₁₎	147		152₁₎、₂₎	153	154
9	144	145₁₎	148	147	146₂₎	156₁₎、₂₎	152₂₎	155
10	149	145₂₎	150	147	151	156	157	158

144．证明：对于任意自然数n，存在由数字1和2组成的且能被2^n整除的数．

145．1）给定三角形$A_1A_2A_3$，在它的边A_1A_2上取点B_1和D_2，在边A_2A_3上取点B_2和D_3，在A_3A_1上取点B_3和D_1，使当$A_1B_1C_1D_1$、$A_2B_2C_2D_2$和$A_3B_3C_3D_3$是平行四边形时，直线A_1C_1、A_2C_2、A_3C_3相交于点O．

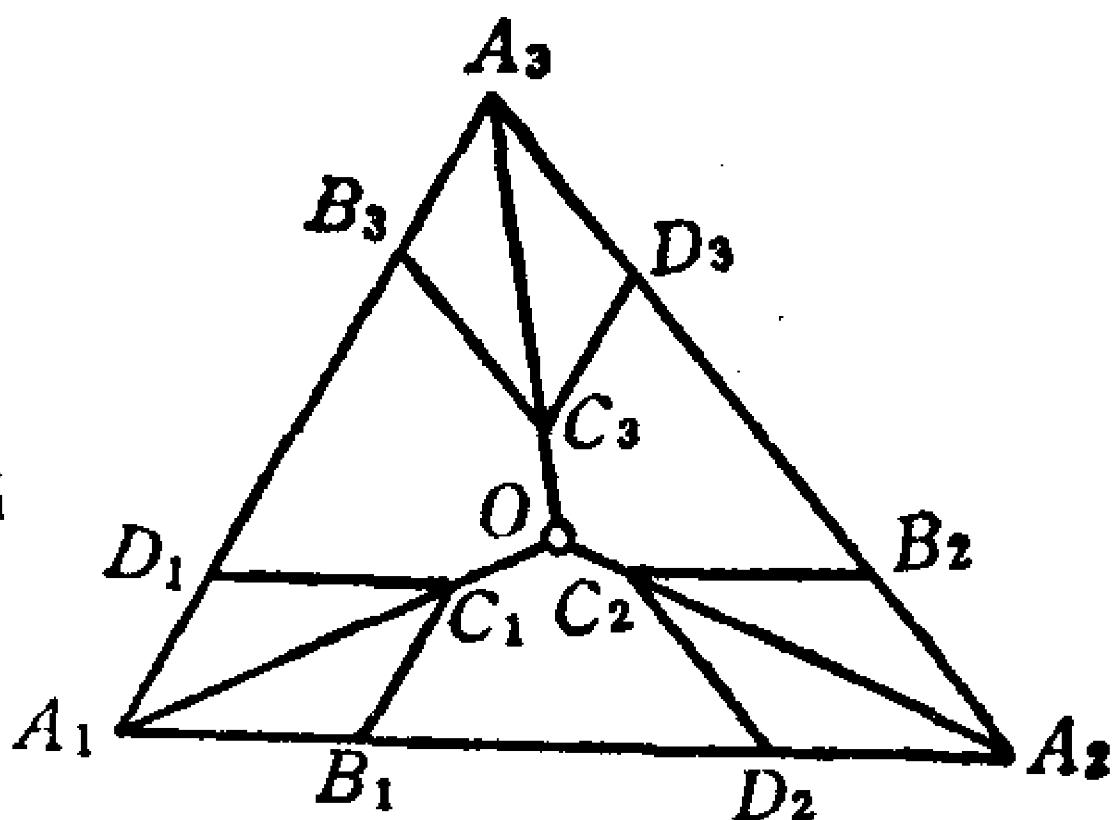


图 7

证明：如果$A_1B_1=A_2D_2$、$A_2B_2=A_3D_3$，那么$A_3B_3=A_1D_1$（图 7）．

2）给定凸多边形$A_1A_2\cdots A_n$，在它的边A_1A_2上取点B_1和D_2，在A_2A_3上取点B_2和D_3，…，在A_nA_1上取点B_n和D_1，使得$A_1B_1C_1D_1$、$A_2B_2C_2D_2$、…、$A_nB_nC_nD_n$为平行四边形时，直线A_1C_1、A_2C_2、A_3C_3…、A_nC_n相交于点O．证明：

$$A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B_3\cdots A_nB_n=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdots A_nD_n.$$

146．1）两个人做游戏：第一个人写上下两行数，每行10个，使它满足以下规则：如果b在a下面，d在c下面，那么$a+d=b+c$．第二个人知道这个规则后想确定所有写出的数，他可以向第一个人提问题："在第一行第三个位置上是什么数？"或者"在第二行第九个位置上是什么数？"等等．问：第二个人至少要提多

少个那样的问题才能知道所有的数？

2）在$m\times n$的表格中写满了数，使得任何两行和任何两列所构成的矩形的两个相对顶点上的数之和等于它的另外两个相对顶点上的数之和。擦去了一部分数，但是可根据剩下的数来复原擦去的数。证明：剩下的数不少于$m+n-1$个。

147. 在边长为1的正方形中有若干个圆，每个圆的直径小于0.001，任何两个圆的任意两点间的距离不等于0.001。证明：被这些圆所覆盖的总面积不超过0.34。

148. 三个容器里都注进了整数升的水，可以从其它容器中往任何一个容器中再倒进这个容器中已有的那么多水。

证明：若干次这样“重倒”后能倒空一个容器。（每个容器都足够大，能盛下所有的水。）

149. 证明：如果数p_1、p_2、q_1、q_2满足不等式

$$(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)<0$$

那么二次三项式$x^2+p_1x+q_1$与$x^2+p_2x+q_2$都有实根，而且在每一个多项式的两个根之间有另一个多项式的根。

150. 一物体对两个平面的投影都是圆。证明：这两个圆的半径相等。

151. 在一个圆上写了若干个数。如果对于某4个依次相邻的数a、b、c、d有$(a-d)(b-c)<0$，那么b和c就可以互换位置。证明：那样的运算只能进行有限次。

152. 1）证明：把一个三角形分成两个面积相等、周长相等的多边形的直线通过这个三角形内切圆的圆心。

2）对于有内切圆的任意多边形证明类似的结论。

3）证明：同时等分三角形的面积与周长的所有直线相交于一点。

153. 证明：从25个不同的正数中可以挑出两个数，使得剩下的任何一个数既不等于所挑数之和也不等于所挑数之差（最大

数与最小数之差）．

154．1）在正12边形$A_1A_2\cdots A_{12}$的顶点A_1上写着负号“－”，在其余顶点上都是正号“＋”．可以同时在6个依次相邻的顶点上把符号改成相反的符号．证明：经过若干次改变符号之后，不可能使A_2上的符号变成负号，而在其余顶点上都是正号．

2）如果不是在6个顶点上而是在4个依次相邻的顶点上改变符号，证明以上结论．

3）如果同时在3个依次相邻的顶点上改变符号，证明以上结论．

155．在一张无穷大的格纸上，N个格子被涂成了黑色．证明：从这张纸上可以剪下有限个正方形，它们满足以下条件．

1）所有黑的格子将在所剪下的正方形中．

2）在任何剪下的正方形中黑格子的面积不小于这个正方形面积的1/5且不大于这个正方形面积的4/5．

第156题至158题供10年级学生第二天竞赛之用．请在做题之前先看下面这段话：

“给您一共出了三道题，正确地解出每一道题都很困难并要花费很多时间，您从其中选一道题并尽可能争取有所进展．

交卷之前请您写一个‘成果报告’列出所证的事实、举出您已搞清楚的例子并作出您认为是对的假设．”

156．棱长为n的立方体分成n^3个单位立方体（边长为1）．挑选若干个小立方体并经过每一个小立方体的中心作平行于棱的三条直线．问：最少要挑选多少个小立方体，才能用通过它们所作的直线勾掉所有的小立方体？

1）对于$n=2$、3、4，回答上述问题．

2）试求$n=10$的答案．

3）解一般问题．如果您不能找到准确的答案，可以对小立方体的个数给出一个估计的不等式，并加以证明．

4）请您指出，为什么这个问题可以表达成下面这个形式：

我们研究一切可能的数组（x_1，x_2，x_3），其中x_1、x_2、x_3的值都是下列n个数之一：1，2，…，n。问：最少要选多少个数组，才能对每一个剩下的数组在所选出的数组中找到一个数组，它们只有一个坐标不同。

如果研究的不是3个而是4个或更多字母组成的数组，试就这个更一般的问题给出解答。

157. 1）研究函数$f(x, y)=x^2+xy+y^2$。证明：对于任何点（x，y）存在整数（m，n），使

$$f(x-m, y-n)=(x-m)^2+(x-m)(y-n)+(y-n)^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

2）用$\bar{f}(x, y)$表示$f(x-m, y-n)$在m、n取一切整数时的最小值，那么1）就归结为：对于一切x、y，有不等式$\bar{f}(x, y)\leqslant 1/2$。

证明：实际上更强的不等式$\bar{f}(x, y)\leqslant 1/3$也成立，并求使$\bar{f}(x, y)=1/3$成立的所有点（$x$，$y$）的集合。

3）研究函数$f_a(x, y)=x^2+axy+y^2$（$0\leqslant a\leqslant 2$）。求与a有关的c，使对一切（x，y）有不等式$|\bar{f}_a(x, y)|\leqslant c$；并力求找到准确的估计。

158. 具有两个入口和两个出口的转换开关（图8-1）可以处于两种不同的状态。

在图8-2中表示的是有三个入口和三个出口的电话通讯线路图，它具有“通用”的性质：改变转换开关的状态后，可以实现三个入口与三个出口的六种连接，即：

$$\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3\end{matrix}\quad \begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{matrix}\quad \begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1\end{matrix}\quad \begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&3\end{matrix}\quad \begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{matrix}\quad \begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&3&2\end{matrix}$$

（请验证这一点。并注意：这个图中共有$2^3=8$种不同状态，

因为每一个转换开关可处于两种状态。）

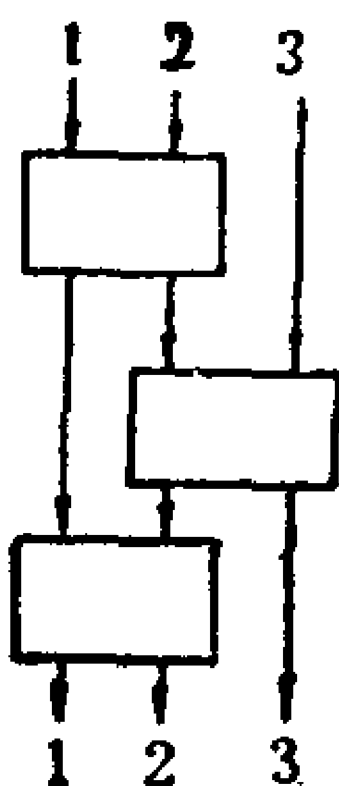


图8—1

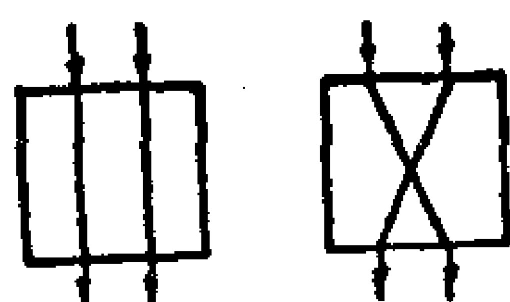


图8—2

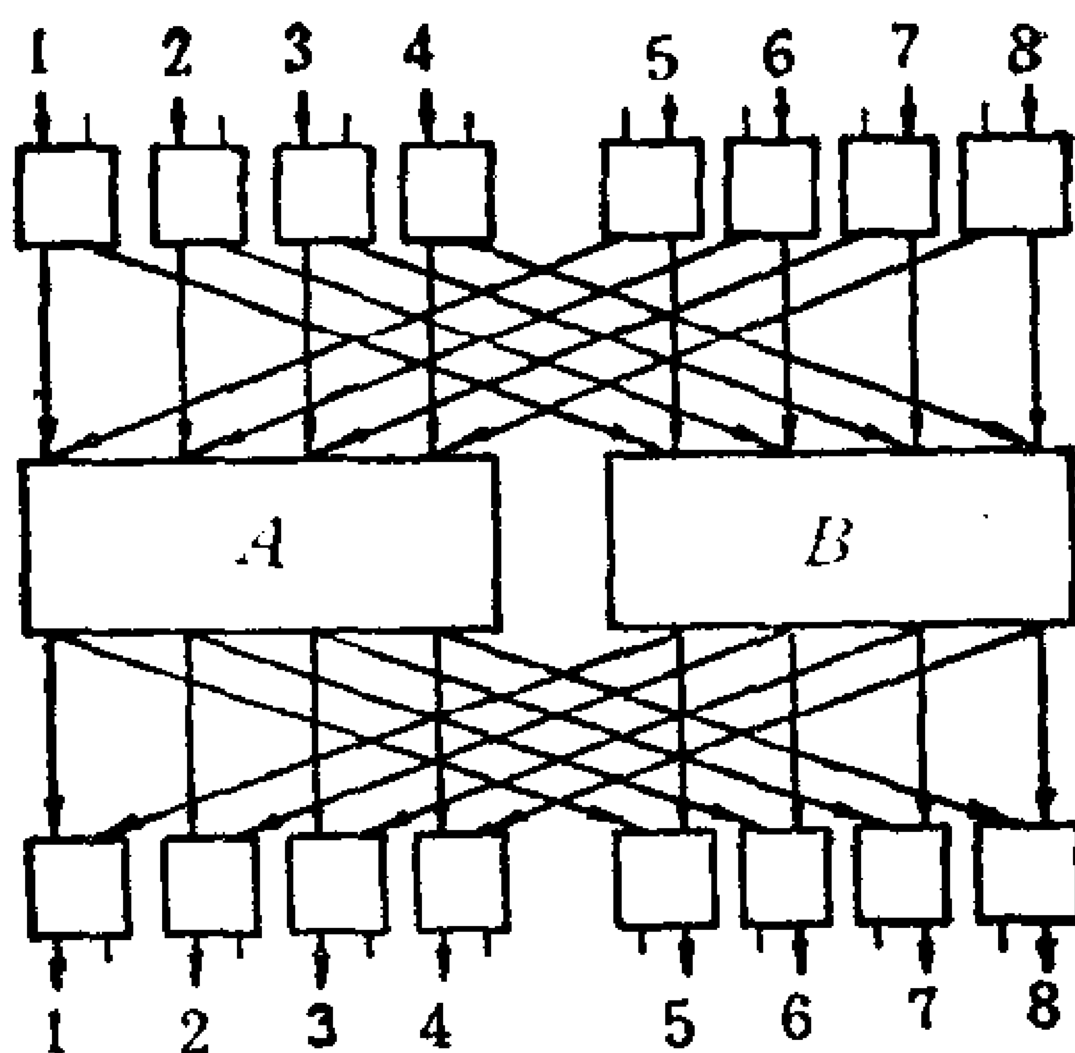


图8—3

1）作一个有4个入口和4个出口的通用线路图，即能实现24种连接的通讯线路图。

2）那样的通讯线路图最少需要多少个转换开关？

3）称有n个入口和n个出口的线路图为通用的，如果它能实现n个入口和n个出口的$n! =1 \cdot 2 \cdots n$种连接。

图8-3中表示的是有8个入口和8个出口的通讯线路图，其中A、B是4通用线路图，证明它是8通用的。

估计在最小的n通用线路图中所需转换开关的数量。

第 六 届（1972年）

年级		第一天			第二天		
8	159	160	161		166	167	168
9	162 1）	163	161	164	169	170	171
10	162 2）	163	165	164	166	172	173

159. 在矩形$ABCD$中，点M是AD边的中点，N是BC边的中点，在DC的反向延长线上取点P，用Q表示直线PM与AC的交点。

证明：$\angle QNM=\angle MNP$。

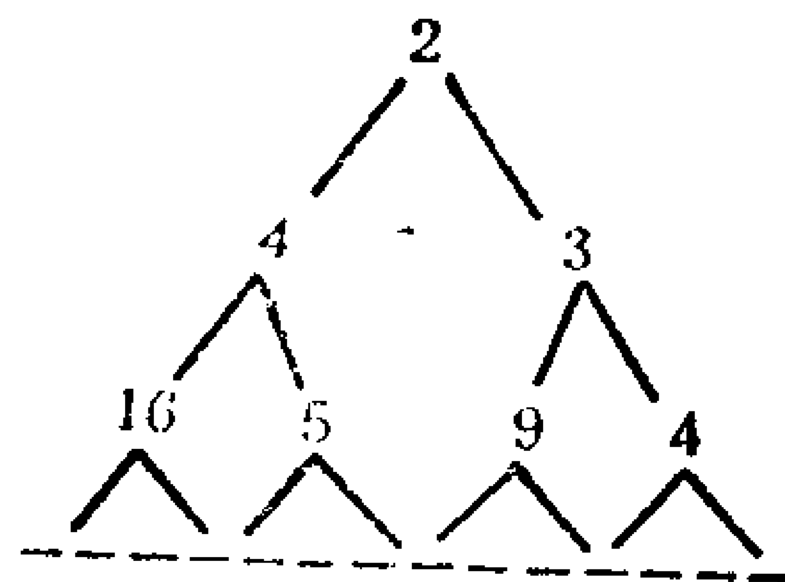


图9

160. 50条线段在一条直线上。证明下列结论至少一个正确：

1）某8条线段有公共点。

2）存在8条线段，其中的任意两条都没有公共点。

161. 求使$4^{27}+4^{1000}+4^x$是完全平方的最大整数x。

162. 1）设a、m、n是自然数，$a>1$。证明：如果a^m+1能被a^n+1整除，那么m能被n整除。

2）设a、b、m、n为自然数，同时a、b互质，且$a>1$。证明：如果a^m+b^m能被a^n+b^n整除，那么m能被n整除。

163. 按以下规则作一个三角形的表格：在最上一行中写着自然数a，往下在每一个数的左下方写k^2，右下方写$k+1$。例如$a=2$时，所得的表格见图9。

证明：在这个表格的每一行中所有数字都不相同。

164. 给定面积之和等于1的若干个正方形。证明：可以把这些正方形不重叠地放入面积为2的正方形中。

165. 点O是凸四边形$ABCD$的对角线的交点。过三角形AOB中线的交点与三角形COD中线的交点引一直线，再过三角形BOC高的交点与三角形AOD高的交点引一直线。证明：这两条直线相互垂直。

166. 9条直线中的每一条都把正方形分成面积之比为2∶3的两个四边形。证明：这9条直线中至少有3条相交于一点。

167. 给定一圆内接7边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$。证明：如果这个圆的圆心在7边形的内部，那么以A_1、A_3和A_5为顶点的内角之和小于$450°$。

168. 两个人做如下游戏：第一个人先报一个数字，第二个人根据自己的判断用这个数字去代替下式中的某个小星星：

$$\begin{array}{r} *\ *\ *\ * \\ -\ *\ *\ *\ * \\ \hline \end{array}$$

然后第一个人再报一个数字，依此类推，共进行8次，直到上式中所有小星星都变成数为止。报数字的那个人力求得到的差尽可能地大，而第二个人则希望差尽可能地小。

证明：1）不管第一个人报什么数字，第二个人总能安排数使得到的差不超过4000。

2）不管第二个人把数字放到什么位置上，第一个人总可以这么报数字，使得到的差不小于4000。

169. 设x、y是正数，S是x、$y+\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$中最小的数。求S的可能的最大值。x、y取何值时能达到最大值？

170. 凸多边形内部的点O能与凸多边形的每两个顶点构成一等腰三角形。证明：这个点O与多边形的各顶点等距。

171. 有两张100×100个格子的格纸，问：能否把数字0、1、2分放到它的格子中，使在任意3×4个格子的矩形里有3个0、4个1和5个2？

172. n个正数x_1、x_2、…、x_n之和等于1，设S是下列各数中最大的数：

$$\frac{x_1}{1+x_1},\ \frac{x_2}{1+x_1+x_2},\ \cdots,\ \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

求S的可能最小值。x_1、x_2、…、x_n取何值时能达到最小值？

173. 当冰球循环赛的一轮比赛结束时，对于任何一组球队都能找到一球队（也可能就是这一组中的球队），它与这组球队比赛的得分是一个奇数。证明：有偶数个队参加了循环赛。（失败得0分，平局得1分，取胜得2分。）

第 七 届（1973年）

年级	第一天			第二天			
8	174 1)	175	178	182	188	184	
9	174 2)	177	178	179	185	186	184
10	180	177	181	187	188	184	

174. 在法庭上作为物证出示了14个硬币．鉴定人发现，第1至第7个硬币是假的，第8至第14个硬币是真的。法庭仅知道，假硬币的重量都相同，真硬币的重量也相同，并且假的比真的轻．鉴定人使用的是没有砝码的天平．

1）鉴定人想向法庭证明，第1至第7个硬币是假的．问：他如何只利用三次称量来做到这一点？

2）证明：他可以利用三次称量进一步证明，第1至第7个硬币是假的，第8至第14个硬币是真的．

175. 一个9位数的各位数字由除了0以外的所有数字组成，且末位数字是5．证明：它不可能是整数的完全平方．

176. 给定n个点，$n>4$．证明：可以用箭头把它们连结起来，使得从一个点到达另外任意一点时只走过一个箭头或者走过两个箭头（每两个点只能用一个方向的箭头连接；在箭头上走时只能按箭头指的方向走）．

177. 给定以点O为顶点的角以及与这个角的两边相切于A、B两点的圆周．经过点A且平行于OB的射线交圆周于点C，线段OC交圆周于点E，直线AE、OB相交于点K．证明$OK=KB$．

178. 对于满足条件$-1\leqslant x\leqslant 1$的一切x，实数a、b、c使下列不等式成立：

$$|ax^2+bx+c|\leqslant 1.$$

证明：对于满足上述条件的x，也有不等式

$$|ax^2+bx+c|\leqslant 2.$$

179. 网球联合会根据网球运动员的技术熟练程度给他们编号：最强的运动员为第1号，其次第2号，等等. 已知：在号码之差大于2的运动员的交锋中，总是号码较小的运动员取胜. 1024个最强的运动员参加的循环赛按奥林匹克淘汰制进行：参赛者根据抽签分成若干对，每一对中的优胜者参加下一轮比赛，所以一轮比赛之后运动员的数量减半，于是10轮比赛之后就能产生优胜者. 问：优胜者的最大号码可能是多少？

180. 二次三项式$f(x)=ax^2+bx+c$使方程$f(x)=x$没有实根.

证明：方程$f(f(x))=x$也没有实根.

181. 在一张有无穷个格子的纸上n个格子涂成了黑色. 在时刻$t=1, 2, \cdots$，按以下规则把所有格子重新涂色：

每一个格子k得到在前一时刻三个格子（即格子k本身、右邻的格子和上邻的格子）中大多数格子曾经有过的颜色（如果这些格子中的两个或者3个曾是白色，那么k就得到白色；如果其中两个或者三个格子曾是黑色，那么k就得到黑色）.

1）证明：经过有限时间后在纸上没有黑格子.

2）证明：黑格子的消失不晚于时刻$t=n$.

182. 在锐角三角形ABC的各边上向外侧作三个彼此相似的锐角三角形：AC_1B、BA_1C、CB_1A（同时$\angle AB_1C=\angle ABC_1=\angle A_1BC$，$\angle BA_1C=\angle BAC_1=\angle B_1AC$）.

1）证明：三角形AC_1B、BA_1C和CB_1A的外接圆相交于一个点.

2）证明：直线AA_1、BB_1和CC_1也交于同一点.

183. N个人彼此之间不认识. 现在要使其中的某些人互相

认识，使得任何三个人中都没有相同数量的熟人．证明：对于任意N，都能做到这一点．

184．王在每一个格子上正好停一次并在最后一步回到了最初的位置后，它走遍了8×8的棋盘（王的走法按通常国际象棋规则）．如果用线段把王先后走过的方格中心连接起来，就画出了它的路线，于是就得到了一条不自相交的闭折线．

1）举出表明王沿着水平线和垂直线正好走28步的例子．

2）证明：王走的步数不能少于28．

3）如果格子的边长为1，求王所走路线的可能最大长度和最小长度．

185．给定面积为1、边长为a、b、c的三角形．已知$a\geqslant b\geqslant c$．证明：$b\geqslant\sqrt{2}$．

186．给定凸n边形内的一点，这个凸n边形的边两两不平行．证明：过这一点不可能作出n条以上的直线，使其中的每一条都等分n边形的面积．

187．证明：如果x_1、x_2、x_3、x_4、x_5是正数，那么

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2\geqslant4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1).$$

188．在空间中给出不在同一平面上的4个点．若以这些点作为顶点，能作成多少个不同的平行六面体？

第八届（1974年）

年级	第一天			第二天			
8	189 1)、2)、3)	190	191	197	198	199	200 1)
9	190	192	189 4)	193	201	202	200 2)
10	194	195	196	193	203	204	200 2)

189. 在每张卡片上各写一个数：+1或-1. 可以指着3张卡片提问题："这3张卡片上的数的乘积等于多少？"（但不告诉卡片上写的是什么数）. 当卡片共有 1）30张；2）31张；3）32张时，最少提多少个问题才能知道所有卡片上的数的乘积？

4）在一圆周上写着50个数：+1或者-1. 如果提一个问题能知道3个接连摆着的数的乘积，问：必须至少提多少问题才能知道所有50个数的乘积？

190. k、l是自然数. 在形式为36^k-5^l的数中求绝对值最小的数，并证明所求的数确实最小.

191. 1）已知凸六边形的每条边长都大于1. 问：在这种六边形中总能存在长度大于2的对角线吗？

2）凸六边形$ABCDEF$的对角线AD、BE、CF的长度大于2. 问：在这种六边形中始终存在长度大于1的边吗？

192. 给定两个互相外切的、半径分别为R、r的圆. 作梯形$ABCD$，使每一圆都与梯形的两条腰相切且与一底相切. 求腰AB的最小可能长度.

193. 在平面上给定n个向量，它们的长度都等于1，n个向量之和是零向量. 证明：可以把向量编号，使当$k=1, 2, \cdots, n$时，前k个向量之和的长度不大于2.

194. 当a、b、c取什么实数值时，等式$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|$对一切实数$x$、$y$、$z$成立？

195. 给定正方形$ABCD$. P、Q分别为AB、BC上的点，满足$BP=BQ$. 设H是从点B向线段PC所引垂线的垂足. 证明：角DHQ是直角.

196. 给定若干个红点和若干个蓝点，其中某些点由线段所连接. 称一个点是奇点，如果与它相连的点中多一半点的颜色与它的颜色不同. 奇点可以重新涂色：在每一步中选取任意一个奇

点并把它涂成其它的颜色.

证明：经过若干步之后不再有任何奇点.

197. 求使n^n有k个数字、k^k有n个数字的所有自然数n、k.

198. 在等腰直角三角形ABC的两直角边CA、CB上分别取点D、E，使$CD=CE$. 从点C、D引直线AE的垂线，这两条垂线的延长线分别交斜边AB于K、L. 证明：$KL=LB$.

199. 在8×8的棋盘上两个人玩"猫捉老鼠"的游戏. 第1个人有一个老鼠骰子，第2个人有若干猫骰子. 所有骰子的走法都一样：向右、向左、向上或者向下走一个格子. 如果老鼠在棋盘的边上，那么它可以再走一步跳开棋盘. 如果猫和老鼠都走到同一格子中，那么猫就吃了老鼠. 参赛者轮流走，同时第2个人可以用他的走步立刻调动所有的猫（这时可把不同的猫移往不同的方向）. 老鼠先走，它设法跳离棋盘，而猫则设法吃掉老鼠.

1）设共有两只猫，老鼠被放在不在边上的某一格子中. 问：能不能把猫放到棋盘边上的格子中，使它们能够吃掉老鼠？

2）假设有三只猫，同时假设老鼠第一次连续走两步. 证明：不管骰子开始的位置如何，老鼠总能躲开猫.

200. 1）证明：总能把数1、2、…、32摆成某种次序，使任何两数之和的一半不等于在这两个数之间的任何数.

2）能否把数1，2，3，…，100摆成某种次序，使得任何两个数和的一半不等于在这两个数之间的任何数？

201. 求具有以下性质的一切三位数A：用A的数字的各种重排所得到的一切数的算术平均值仍等于A.

202. 给定一凸多边形，不可能把任何面积为1的三角形放到其中. 证明：能把这个多边形放入面积为4的三角形.

203. f是线段$0\leqslant x\leqslant1$上的函数. 已知：这个函数非负且$f(1)=1$. 此外，对于满足条件$x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，$x_1+x_2\leqslant1$的任意两个数x_1、x_2，有不等式

$$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2).$$

1）证明：满足上述条件的任意函数f，对于一切x都有不等式$f(x)\leqslant 2x$。

2）不等式$f(x)\leqslant 1.9x$对于一切x都成立吗？

204．给定面积为1的三角形ABC。设点A_1、B_1、C_1分别是三条边BC、CA、AB的中点．如果点K、L、M分别在线段AB_1、CA_1、BC_1上，求三角形$A_1B_1C_1$与KLM的公共部分的可能最小面积。

第 九 届（1975年）

年级	第一天				第二天		
8	205₁₎	206	207	208₁₎	213	214	215
9	209	206	210	208₂₎	216	215	217
10	211	212	105₂₎	208	214	218	219

205．1）把三角形ABC绕着外接圆圆心旋转小于180°的某一角度得到三角形$A_1B_1C_1$，彼此对应的线段AB和A_1B_1相交于点C_2，BC和B_1C_1相交于点A_2，CA和C_1A_1相交于点B_2。证明：三角形$A_2B_2C_2$相似于三角形ABC。

2）四边形$ABCD$是圆内接四边形，把它绕着外接圆的圆心旋转小于180°的某一角度得到四边形$A_1B_1C_1D_1$。证明：彼此对应的直线AB和A_1B_1、BC和B_1C_1、CD和C_1D_1、DA和D_1A_1的4个交点是平行四边形的顶点．

206．给定面积为l的三角形ABC。两个人做以下游戏：第一个人在AB边上选取一点X，第二个人在BC边上选取一点Y，然后第一个人再在AC边上选取一点Z。第一个人的目的是得到最大面积的三角形XYZ，而第二个人的目的是得到最小面积的三角

形．问：第一个人能确保的最大面积是多少？

207．给定一凸32边形，它的所有顶点都在方格边长为1的格纸结点上．求这个多边形可能的最小周长．

208．1）在7×7个格子的正方形中要标出k个格子的中心，使任意4个标出的点不是某一矩形的顶点，而这个矩形的边平行于正方形的边．问：当k最大取何值时能做到这一点？

2）对于13×13个格子的正方形解类似的问题．

209．点B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6分别是凸六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$的6条对角线A_6A_2、A_1A_3、A_2A_4、A_3A_5、A_4A_6、A_5A_1的中点．

证明：如果六边形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$是凸六边形，那么它的面积是原六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$面积的1/4．

210．证明：用数字1和2可以组成2^{n+1}个数，每一个数都是2^n位，而且每两个数至少在2^{n-1}个数位上不相同．

211．在平面上给定多边形的有限集合，这些多边形中每两个都有公共点．证明：存在与所有多边形都相交的一条直线．

212．证明：对于正数a、b、c，不等式

$$a^3+b^3+c^3+3abc>ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$$

成立．

213．三只苍蝇沿着三角形ABC的边爬行，使由这三个苍蝇构成的三角形的重心保持在一点不变．

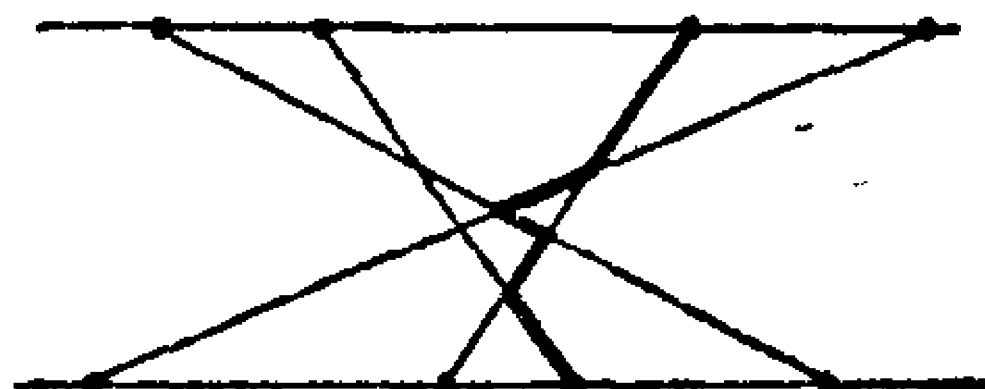
证明：如果某只苍蝇爬过了三角形的3条边，那么三只苍蝇构成的三角形的重心与三角形ABC的重心重合（三角形的重心是它的三条中线之交点）．

214．在黑板上写着若干个0、1、2．可以擦去其中两个不相等的数字，并代之以与擦去的数字不相同的数字（例如，用2代替0和1，用0代替1和2，用1代替0和2）．

证明：如果经过若干步这样的运算后在黑板上还有一个数，

那么这个数与擦去数字的先后次序无关。

215．给定一水平带形（它的两条边互相平行）以及与这条带形相交的n条直线。这些直线中的每两条都在带形内部相交，而且任意3条直线没有公共点。考察起点在带形下边缘、经由所给直线、终点在带形上边缘上的所有道路，它们具有以下性质：当沿着每一条道路行走时，始终往上走；当走到直线的交点时，必须走到另一条直线上去（图10）


图10

证明：在这些道路中

1）没有公共点的道路不小于$n/2$条。

2）存在一条道路，它至少由n条线段构成。

3）存在一条道路，它至多经由$\frac{n}{2}+1$条直线。

4）存在一条道路，它经由所有直线。

216．自然数k取什么值时，可以用$1\times1\times1$的白色及黑色小方块组成一个$k\times k\times k$的立方体，使对任何小方块恰好有两个相邻小方块与它有相同的颜色？（两个小方块认为是相邻的，如果它们有公共面。）

217．给定

1）自然系数的多项式$P(x)$；

2）整系数的多项式$P(x)$。

用a_n表示$P(n)$在十进制记数法中的数字和。

证明：存在一个数，它在数列a_1，a_2，…，a_n，…中出现无穷多次。

218．20个队参加世界冠军赛和欧洲冠军赛．在这些队中有k个欧洲队，它们在世界冠军赛上彼此交锋的结果计入欧洲冠军赛的成绩．冠军赛进行了一轮。

如果进行的是

1）冰球冠军赛（允许平局）

2）篮球冠军赛（没有平局），那么，k最大取什么值时，在欧洲冠军赛上得分绝对多的队可能在世界冠军赛上得分绝对少？

219. 1）给定实数a_1、a_2、b_1、b_2以及正数p_1、p_2、q_1、q_2。证明：在2×2矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1}{p_1+a_1} & \dfrac{a_1+b_2}{p_1+q_2} \\ \dfrac{a_2+b_1}{p_2+q_1} & \dfrac{a_2+b_2}{p_2+q_2} \end{pmatrix}$$

中可找到一个数，它不小于与它在同一行中的任何数，且不大于与它在同一列的任何数。

2）给定实数a_1、a_2、…、a_m，b_1、b_2、…、b_n以及正数p_1、p_2、…、p_m，q_1、q_2、…、q_n。作一个$m\times n$矩阵，使它在第i行（$i=1,2,\cdots,m$）、第j列（$j=1,2,\cdots,n$）交点的数为

$$\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}.$$

证明：在这个矩阵中存在一个数，它不小于与它在同一行的任何数，也不大于与它在同一列的任何数。

第　十　届（1976年）

年级	第一天	第二天
8	220　221　222 1)、2)　223	229　230　231
9	222 2)　224　223　225	230　232　231
10	223　226　227　228　225	233　234　231

220. 在桌子上放着50块准确走时的手表。证明：在某一时刻，从桌子中心到分针末端的距离之和大于从桌子中心到手表中

心的距离之和。

221．把100个数接连写成一行．然后在它下面按以下规则写第2行：把第1行的每个数a下面写一个表示a在第1行中出现次数的自然数．用同样的方法可由第2行得到第3行：在第2行的每个数b下面写一个表示b在第2行中出现次数的自然数．再由第3行如此得到第4行，等等．

1）证明：某一行与它的下一行相同．

2）证明：第11行与第12行相同．

3）举出一个说明由第1行得到的第10行和第11行不相同的例子．

222．在平面上给出半径相同的3个圆周．

1）证明：如果它们都相交于一点，如图11-1所示，那么用粗线标出的弧AK、CK、EK之和等于180°．

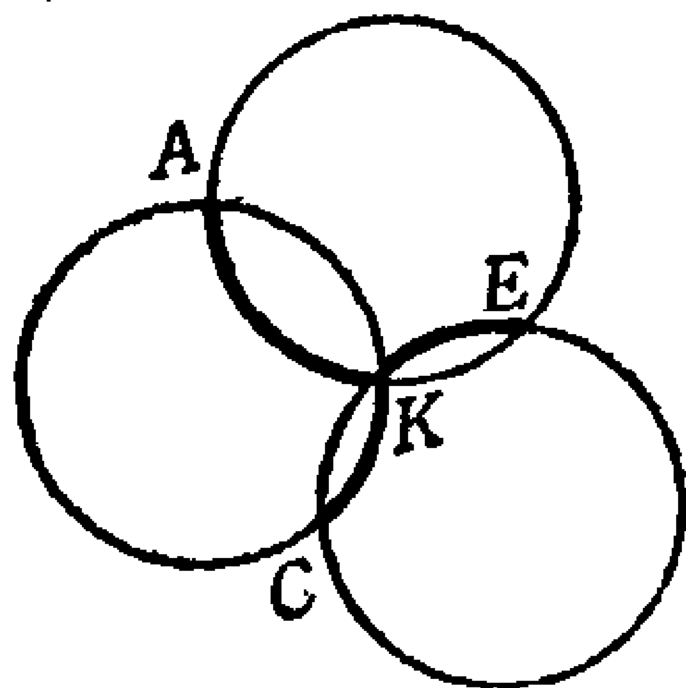


图11—1

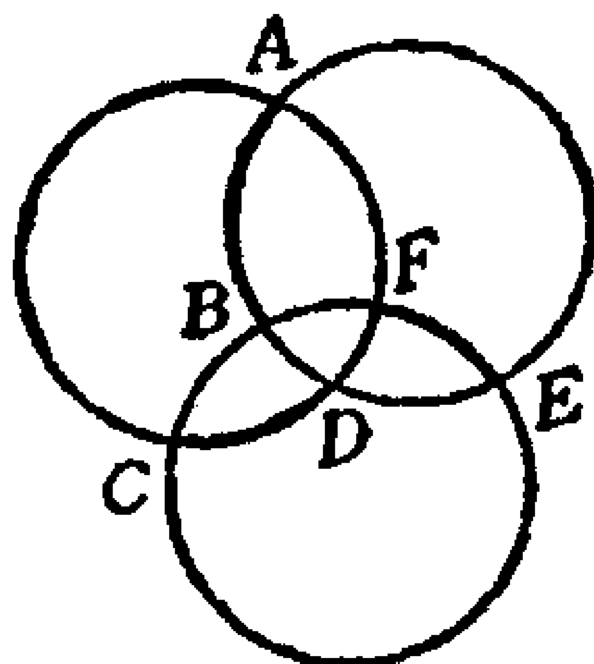


图11—2

2）证明：如果它们的位置如图11-2所示，那么用粗线标出的弧AB、CD、EF之和等于180°．

223．x_1、x_2是小于1000的两个自然数，用这两个数可以作出一数列x_1，x_2，x_3，…，x_n，其中$x_3=|x_1-x_2|$，x_4等于$|x_1-x_2|$、$|x_2-x_3|$、$|x_1-x_3|$中最小的一个数，x_5等于$|x_1-x_2|$、$|x_1-x_3|$、$|x_1-x_4|$、$|x_2-x_3|$、$|x_2-x_4|$、$|x_3-x_4|$中最小的一个数，等等，（对每一个数，比较它前面任意两个不同数之差的绝对值，再取其中最小的一个．）证明：

一定有$x_{21}=0$。

224．能否用由数字0和2组成的不同的3位数把立方体的顶点标号，使得任何两个相邻顶点的号码至少在两个数位上不相同？

225．在平面上给出和为$\vec{0}$的向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$．证明不等式

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant|\overrightarrow{a+d}|+|\overrightarrow{b+d}|+|\overrightarrow{c+d}|.$$

226．在正1976边形中，标出了所有边的中点以及所有对角线的交点．问：最多有多少个标出的点在同一圆周上？

227．在一张正方形的纸上画着n个矩形，它们的边都平行于纸边．已知任何两个矩形都没有公共的内点．证明：如果挖去所有的矩形，那么纸的剩余部分的小块的数量不多于$n+1$．

228．三个步行者各沿着一条笔直的大路匀速前进．在最初的时刻他们不在同一直线上．证明：他们能够在同一直线上的机会不多于两次．

229．在99×99的国际象棋盘上画有图形（这个图在1）、2）、3）3个小题中将不相同）．在图形T的每个格子中各有一个甲虫，在某一时刻甲虫可以飞起来并重新落到这个图形T的格子中去；同时在一个格子中可以有若干个甲虫．在相邻两个格子中的甲虫在起飞之后，可以重新落在相邻格子中，也可以落到同一个格子中(把有公共边或者公共顶点的格子称为相邻的格子)．

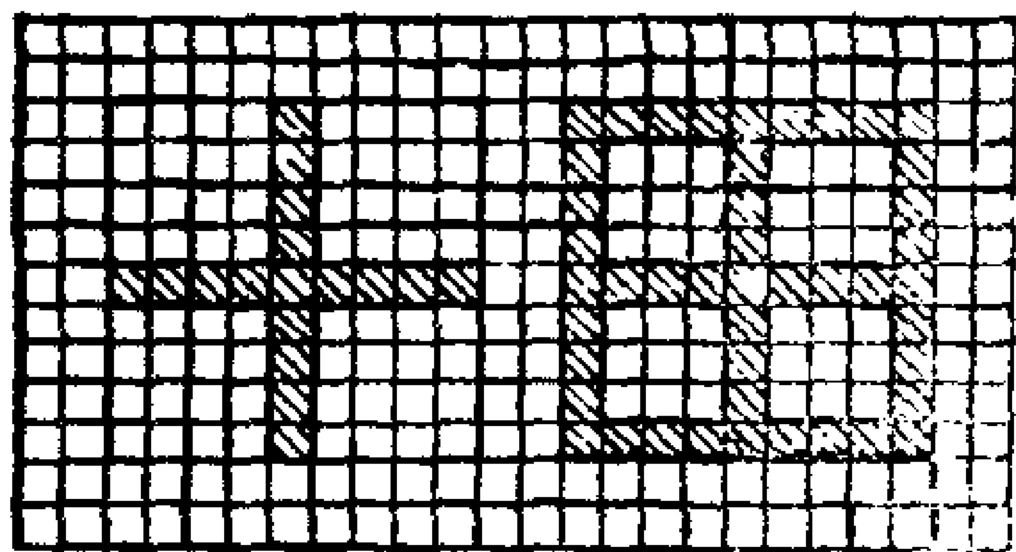


图12—1　　　图12—2

1）假设图形T是"中心十字"（如图12-1）．证明：在这个情形中某个甲虫回到了原处或者飞到相邻的格子中．

2）如果图形是"窗户框"（如图12-2），上结论正确否？

3）如果图形是整个棋盘，上结论成立吗?

230．如果一个三角形的每条边长都大于1，就称它是“大的”三角形．

给定边长为5的正三角形ABC，证明：

1）从三角形ABC中能挖去100个“大的”三角形．

2）完全能够把三角形ABC分成至少100个“大的”三角形．

3）能把三角形ABC分成不少于100个“大的”三角形，并满足以下条件：任何两个“大的”三角形或者不相交，或者只有一个公共点，或者有一条公共边(这样的分法称为“三角剖分”)．

4）对于边长为3的等边三角形解2）、3）．

231．对于给定的自然数n，如果在自然数的数列a_1，a_2，…，a_k（$k\geqslant n$）中划去某些项后得到了1，2，…，n的任一重排（即得到这样的一个数列，数1，2，…，n中的每一个数在其中只出现一次，则称该数列为“万能的”．例如，数列（1，2，3，1，2，1，3）对于$n=3$是万能数列；而数列（1，2，3，2，1，3，1）不是万能数列，因为不管怎么删法都不能得到1，2，3的重排（3，1，2）．这个试题的目的是对于给定的n，估计最短万能数列的项数．

1）举一个有n^2项的万能数列的例子．

2）举一个有n^2-n+1项的万能数列的例子．

3）证明：任何万能数列的项数不少于$n(n+1)/2$．

4）证明：当$n=4$时，最短万能数列有12项．

5）对于给定的n，试求尽可能短的万能数列．（竞赛评委会能作出有n^2-2n+4项的万能数列．）

232．在圆周上有和等于0的n个实数，且其中有一个数等于1．

1）证明：存在两个相邻的数，它们的差不小于$4/n$．

2）证明：存在一个数，它的两个邻数的算术平均值与它的

差不小于$8/n^2$.

3）可以改进2）中所作的估计，试用一个较大的数代替2）中的8，使所得的估计仍然对一切自然数成立.

4）证明：当$n=30$时，在圆周上有一个数，它的两个邻数的算术平均值与它之差不小于2/113. 举出由圆周上的30个数构成的数组，使其中任何一个数的两个邻数的算术平均值与这个数之差不大于2/113.

233. 在中心为O的正n边形的顶点上放着数(+1)和(−1). 可以同时改变在某一正k边形顶点上的数的符号（k边形的中心是O，且k可以等于2）.

证明：当

1）$n=15$；

2）$n=30$；

3）n是任意大于2的自然数时，存在(+1)和(−1)的初始摆法，无论进行多少次改变符号都不能把所有顶点上的数都变成(+1).

4）对于任意n，试求满足以下条件的(+1)、(−1)的不同摆法的最大个数$k(n)$：任何一个摆法不能由另一个摆法经过若干次改变符号得到. 例如，证明$K(200)=2^{80}$.

234. 在半径为1的球面上作一称之为赤道的大圆周. 我们将利用极点、经线、纬线等地理术语.

1）我们给出球面上的函数f：它在球面上每一点的值等于这点到赤道平面距离的平方.

验证这个函数有以下性质：

如果M_1、M_2、M_3是球面的3条互相垂直的半径的端点，那么$f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$.

在以下各小题中，f是球面上的任意非负函数，它在赤道的每一点上变为零且具有上述性质.

2）设M和N是同一经线上在北极和赤道之间的两个点．证明：如果点M比点N离赤道平面远些，那么$f(M)>f(N)$．

3）设M和N是球面上的任意两点．证明：如果点M比点N离赤道远些，那么$f(M)>f(N)$．

4）证明：如果点M和N在一条纬线上，那么$f(M)=f(N)$．

5）证明：函数f与在1）中描述的相同．

第十一届（1977年）

年级	第一天					第二天			
8	235	236	$237_{2)}$	230		243	$244_{1)、2)}$	245	246
9	$237_{1)}$	239	235	240		247	248	249	250
10	$237_{1)}$	239	241	242	235	251	244	246	

235．在平面上给定不自相交的闭折线，它的任何3个顶点都不在同一直线上．如果不相邻的两条边中的一条边的延长线与另一条边相交，则称它们是特别的．证明：共有偶数对特别的边．

236．在平面上标出了不在一直线上的若干个点，并在点的附近写上了数．已知：如果直线通过两个或者更多个所标出的点，那么在这些点附近所写数之和等于0．证明：所有数都等于零．

237．1）T_1和T_2为圆内接三角形，同时T_1的顶点是T_2的顶点分圆周所得弧的中点．证明：在六边形$T_1\cap T_2$中，连结相对顶点的对角线平行于三角形T_1的边且相交于一个点．

2）连结三角形ABC的外接圆弧AB、AC之中点的线段与AB边、AC边分别相交于D、K．证明：点A、D、K以及三角形ABC内切圆的中心O是菱形的顶点．

238．在圆周上有若干个黑棋子和白棋子．两个人做游戏：第一个人拿走有相邻白棋子的所有黑棋子(即使是从一侧也可以)，

然后第二个人拿走有相邻黑棋子的一切白棋子。这么做下去一直到剩下一个颜色的棋子为止。

1）设起初有40个棋子。在每一个人做两步后，能不能在圆周上只剩下一个棋子？

2）设在圆周上起初有1000个棋子。问：最少经过多少步之后在圆周上只剩下一个棋子？

239．给定一无穷数列 $\{a_n\}$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)=0$．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

240．在某个国家中从每个城市都可以经过其它城市而乘行到达另外任何一个城市。已知每一次乘行的价格。有两条全国各城市之间的乘行路线，使每个城市在每条路线中恰好出现一次。编制乘行路线遵照了以下原则：乘行路线的起点城市可以任意选择，而在以后的每一步中，要从其余的城市中选择那样的城市，使由前一个已选好的城市到达它时花最少的钱（如果那样的城市有好几个，则从中任选一个）。而在编制第2条路线时，起点城市也可以任意选择，但在以后的每一步中，要从其余的城市中选择那样的城市，使由前一个已选好的城市到达它时花最多的钱。证明：沿第一条路线乘行的总费用不多于沿第二条路线乘行的总费用。

241．在凸多面体 M 的每个顶点上有三条棱汇合。已知它的每一个面都是有外接圆的多边形。证明：这个多面体有外接球面。

242．有一多项式 $x^{10}+*x^9+*x^8+\cdots+*x^2+*x+1$．两个人做游戏，首先第一个人用某个数替代任何一个小星星，接着第二个人用一个数替代剩余小星星中的任何一个，然后第一个人再用一个数替代一个小星星，等等，共做了9步，如果所得多项式不会有实根，那么第一个人就赢了，即使有一个实根，第二个人就赢。

问：无论第一个人用什么数替代*，第二个人都能赢吗？

243. 7个地精围坐在圆桌周围，在每个地精面前有1个盛着牛奶的杯子．1个地精把自己的奶都均分到其余的杯子中去，接着他右边的第一个邻居照样做一遍，然后下一个，等等，在第7个地精把自己的奶均分到其它杯子中后，在每一个杯子中还是最初的那么多奶．所有杯子中的奶共有3升．问：最初每个杯子中各有多少牛奶？

244. 如果一个$2n$位数它本身是完全平方，而且用它的前n个数字和后n个数字所组成的数也都是完全平方（这里第2个n位数可以从数字0开始，但不能等于0，而由前n个数字组成的第1个n位数不能从0开始），则称这个数为奇数．

1）求所有两位数和四位数的奇数．

2）有六位数的奇数吗？

3）证明：存在20位的奇数．

4）证明：100位的奇数至多有10个．

5）证明：存在30位的奇数．

245. 给定正数集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$．我们写出每一个子集中的所有数之和（即分别写出1个数、2个数、…、n个数之和）．证明：可以把所写出的这些和数分成n组，使在每一组中最大数与最小数之比不超过2．

246. 有1000张号码分别为000、001、…、999的票和100个号码为00、01、…、99的小匣子．如果小匣子的号码能由一张票的号码删去其中的一个数字得到，那么这张票就可以放到这个小匣子中去．证明：

1）可以把所有票分放到50个小匣子中去．

2）不可能把所有的票分放到少于40个的小匣子中去．

3）不可能把所有票分放到少于50个的小匣子中去．

4）假设票的号码是4位数（从0000到9999）．如果小匣子的号码能由票的号码删去两个数字得到，那么这张票就可放到这

个小匣子中去．证明：能把所有4位数字的票分放到34个小匣子中去．

5）对于k位数的票（$k=4$，5，6…）最少需要多少个小匣子？

247．给定一张有100×100个格子的正方形格纸．在这张格纸上沿格子的边作了若干条不自相交的闭折线，而且这些折线不相交．这些折线严格地在正方形内部，但端点可在正方形的边界上．证明：除了正方形的顶点外，存在（在正方形内部或边界上）不属于任何折线的结点．

248．给定自然数x_1、x_2、…、x_n以及y_1、y_2、…、y_m．两个和$x_1+x_2+\cdots+x_n$以及$y_1+y_2+\cdots+y_m$彼此相等且小于mn．证明：在等式$x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$中可以删去一部分加数，使剩下的部分仍然是等式．

249．在平面上给定1000个正方形，它们的边都平行于坐标轴．设M是这些正方形的中心之集合．证明：可以把其中一部分正方形做上记号，使集合M的每个点落在不少于1个且不多于4个做记号的正方形中．

250．在一张桌子上放着天平和n个不同重量的砝码，把砝码轮流放到天平盘中（每一步从桌子上取任何一个砝码并把它加到这个或那个盘子中．

1）证明：可以按下面的次序来放砝码：首先让左边的盘子过重，然后让右边的过重，接着再左边的过重、右边的过重等等．我们用字母L、R来对应于这个称量结果的序列：$LRLRLR\cdots$，其中L表示左边过重，R表示右边过重．

2）证明：对于由n个字母L、R构成的任何一个词，可以这么来把砝码放到天平盘中，使这个词对应于称量结果的序列．

251．我们将研究单变量x的且首项系数为1的多项式．两个那样的多项式P、Q称为可交换的，如果多项式$P(Q(x))$和

$Q(P(x))$恒等（即在去括号和化为标准形式后，这两个多项式的所有系数对应相等）。

1）对于每一个数a，求与多项式$P(x)=x^2-a$可交换的、不超过3次的所有多项式。

2）设P为2次多项式，k为自然数。证明：至多存在一个与P可交换的k次多项式。

3）求与所给的二次多项式P可交换的4次及8次的所有多项式。

4）多项式R、Q与同一个2次多项式P可交换，证明它们也可交换。

5）证明：存在多项式的无穷数列P_2，P_3，…，…，P_k，…其中P_k为K次多项式，使在这个数列中任何两个多项式都可交换而且多项式P_2有形式$P_2(x)=x^2-2$。

第十二届（1978年）

年级	第一天	第二天
8	252 253 254 255 1）、2）	260 261 262 263
9	252 253 254 257	260 261 264 265
10	258 259 255 3）、4）、5） 257	260 266 267 266

252．用a_n表示最接近于$\sqrt{n}$的整数．求和

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{1980}}$$

253．点M是四边形$ABCD$内的一点，使$ABMD$是平行四边形．证明：如果$\angle CBM=\angle CDM$，那么$\angle ACD=\angle BCM$．

254．证明：当m为任意自然数时，1978^m-1不能被1000^m-1整除。

255．在平面上（或在空间中）给定有限集合K_0，把用这个集合中的一个点关于另一点的对称映射所得到的一切点都加到这个集合上，这就得到了K_1．类似地可由集合K_1得到K_2，由K_2得到K_3，等等．

1）设集合K_0由距离为1的两个点A、B构成．问：当n最小取什么值时，在集合K_n中存在与点A距离为1000的点？

2）设K_0由面积为1的等边三角形的3个顶点构成．求包含K_n的最小凸多边形的面积（$n=1, 2, \cdots$）．

以下各小题中K_0由单位体积的正四面体的4个顶点构成．

3）研究包含K_1所有点的最小凸多面体．问：这个多面体有多少个面以及都是什么样的面？

4）这个多面体的体积等于多少？

5）求包含集合K_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）的最小凸多面体的体积．

256．有两小堆火柴，一堆中有m根，另一堆中有n根，$m>n$．两个人轮流各从一堆中取火柴，每次从一堆中所取火柴的根数（异于0）是另一堆中火柴根数的倍数．能在一堆中取最后一根火柴的人就赢．

1）证明：如果$m>2n$，那么第一个取火柴的人能保证自己赢．

2）当α取何值时下结论成立：如果$m>\alpha n$，则先取火柴的人能保证自己赢？

257．证明：存在无穷有界数列x_n，使对不同的m和k，不等式

$$|x_m-x_k|\geqslant\frac{1}{|m-k|}$$

成立．

258．设$f(x)=x^2-x+1$．证明：对于任意自然数$m>1$，数m、

$f(m)$、$f(f(m))$、…两两互质。

259．证明：存在数A，使函数$y=A\sin x$的图象有1978个两两不等的内接正方形（即这些正方形的顶点都属于函数图象）．

260．3架自动机在卡片上打印自然数数对．自动机按以下方式工作：第一架自动机读完卡片$(a;b)$后输出新的卡片$(a+1;b+1)$，第二架自动机读完卡片$(a;b)$后输出新卡片$(a/2;b/2)$（仅当a、b为偶数时它才工作），第三架自动机每次读两张卡片$(a;b)$和$(b;c)$，输出的新卡片是$(a;c)$．此外，自动机能退回所有读过的卡片．

假设有一张初始卡片$(5;19)$，问：能否利用任何类型的自动机来得到卡片：

1）$(1;50)$？

2）$(1;100)$？

3）假设有初始卡片$(a;b)$，$a<b$，而我们想得到卡片$(1;n)$．问：n取何值时能做到这一点？

261．面积为S的n边形内接于半径为R的圆周，在n边形的每条边上都标出一个点．证明：顶点在所标点上的n边形的周长不小于$2S/R$．

262．一只棋子在$n\times n$个格子的棋盘的角上，两个人轮流把它挪到相邻的格子中去（即挪到与这个棋子所在格子有公共边的格子中）．棋子不能第二次走到某一格子中．无处可走的人将要输给对方．

1）证明：如果n为偶数，那么先走的人能赢，而如果n为奇数，则第二个人赢．

2）如果最初棋子不在角上的格子中，而在与它相邻的一个格子中，那么谁将取胜？

263．在平面上给定了若干条不相交的线段，且任何两条都不在一条直线上．我们想再作若干条连结已知线段端点的线段，使所

有线段一起构成一条不自相交的折线．问：总能做到这一点吗？

264．数x_1、x_2、…、x_n属于区间〔a，b〕，其中$0<a<b$．证明不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

265．给定质数$p>3$．在坐标平面上考察由坐标为整数的点（x，y）构成的集合M，其中$0\leqslant x<p$，$0\leqslant y<p$．证明：可以标出集合M中p个不同的点，使其中的任何4个数都不在平行四边形的顶点上，而且其中任何3个数都不在一直线上．

266．证明：对于任何四面体存在两个平面，使四面体对这两个平面的投影的面积之比不小于$\sqrt{2}$．

267．我们考察n个数a_1、a_2、…、a_n，设

$$b_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$C=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2$$
$$D=(a_1-b_n)^2+(a_2-b_n)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2.$$

证明不等式$C\leqslant D\leqslant 2C$．

268．考察数列$x_n=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n$，把它的每一项都变为以下形式：

$x_n=q_n+r_n\sqrt{2}+S_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$，其中$q_n$、$r_n$、$S_n$、$t_n$是整数．求极限

应如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{q_n}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}$

第十三届(1979年)

年级	第一天			第二天			
8	269	270	271	274	275	276	277
9	269	272	271	278	279	280	281
10	273	272	271	276	275	282	283

269. 如果一个等腰直角三角形的三个顶点在另一个等腰直角三角形的三条不同的边上，求这两个等腰直角三角形面积之比的最小值。

270. 松鼠在坐标平面O_{xy}的第一象限($x\geqslant0$, $y\geqslant0$)内按以下方式跳动：它由点(x, y)可以跳到点($x-5$; $y+7$)，或者($x+1$, $y-1$)，但不能跳到一个坐标为负数的点。

问：松鼠从哪些初始点(x, y)不能跳到与坐标原点距离大于1000的点上？画出所有那样初始点的集合并求出其面积。

271. 在国会里每一个议员至多有3个对手。证明：国会能分成两个院，使每一个国会议员在他所在的那个院里至多有一个对手。(约定：如果B是A的对手，那么A是B的对手。)

272. 在练习本里写着若干个数。如果这些数中的两个数或更多一些数的算术平均值不等于这些数中的任何数，那么就可以把这些平均值添写到已写好的那些数旁边。

证明：从数0、1开始，用那样的添写法可以得到数：

1)1/5;

2)0和1之间的任何有理数。

273. x_n是正数的递减序列，对于任何自然数n有

$$x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\cdots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1.$$

证明：对于任何自然数n，有不等式

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\cdots+\frac{x_n}{n}\leqslant 3.$$

274．在平面上给定若干点．对于某些点A、B可作向量$\overrightarrow{AB}$，同时以某个点为起点的向量的个数等于以同一点为终点的向量的个数．

证明：所作的一切向量之和等于$\overrightarrow{0}$．

275．为了在经过任意一个方格中心且平行于棋盘某一边或对角线的每条直线上至少有一个棋子（棋子放在方格中心），那么，在

1）8×8个方格；

2）$n\times n$个方格

的棋盘上至少需要放多少个棋子？

276．解方程组：

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a,\qquad \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b.$$

（a、b为已知数）

277．有若干个正方形，它们的面积和等于4．证明：总能用这些正方形覆盖面积为1的正方形．

278．证明：对于区间[0，1]中的任何数x_1、x_2、…、x_n，下不等式成立：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n+1)^2\geqslant 4(x_1^2+x_2^2\cdots+x_n^2).$$

279．自然数p和q互质，区间[0，1]被分成$p+q$个相等的区间．证明：除去最左边的和最右边的两个区间外，在其余的每个区间中有下列$p+q-2$个数中的一个数：

$$\frac{1}{p}、\frac{2}{p}、\cdots、\frac{p-1}{p}、\frac{1}{q}、\frac{2}{q}、\cdots、\frac{q-1}{q}.$$

280．过空间中的一点O作1979条直线l_1．l_2、…l_{1979}，其中

任何两条都不互相垂直．在直线l_1上选取异于0的任意点A_1．证明：可以在直线l_i，$i=2,3,\cdots,1979$上选取点A_i，使下列关系成立：$A_1A_3\perp l_2$，$A_2A_4\perp l_3$，…，$A_{i-1}A_{i+1}\perp l_i$，…，$A_{1977}A_{1979}\perp l_{1978}$，$A_{1978}A_1\perp l_{1979}$，$A_{1979}A_2\perp l_1$．

281．由数0和1组成的有限数列a_1，a_2，…，a_n应当满足以下条件：对于由0至$n-1$的任何整数k，

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{n-k}a_n$$

都是奇数．

1）对于$n=25$，写出那样的数列．

2）证明：那样的数列对于某个$n>1000$存在．

282．凸四边形$ABCD$由它的对角线分成4个三角形．证明：如果这4个三角形的内切圆的半径彼此相等，那么四边形$ABCD$是一个菱形．

283．在直线上依次摆着n个点A_1、A_2、…、A_n，使线段A_1A_2、A_2A_3、…、$A_{n-1}A_n$的长度都不超过1．用红色标出A_2、…、A_{n-1}之中的$k-1$个点，要求使线段A_1A_n被红点所分成的K个部分中的任何两部分的长度之差不超过1．证明在下列情况下

1）当$k=3$时；

2）对于每一个自然数$k<n-1$，

总能够做到这一点．

第十四届（1980年）

年级	第一天				第二天			
8	284	285	286	287	293	294	295	296
9	288	289	286	290	295	297	298	299
10	291	289	292	290	300	301	302	303

284．接连写出19至80的两位数．问：所得的数192021…7980能被1980整除吗？

285．正方形$ABCD$的竖直边AB被分成n条线段，使有偶数号码的线段长之和等于有奇数号码的线段长之和．过分点作平行于AD边的线段，所得到的n条带形都被对角线BD分成左、右两部分．

证明：有奇数号码的左边部分的面积之和等于有偶数号码的右边部分的面积之和（在图13中这些部分用斜线标出）．

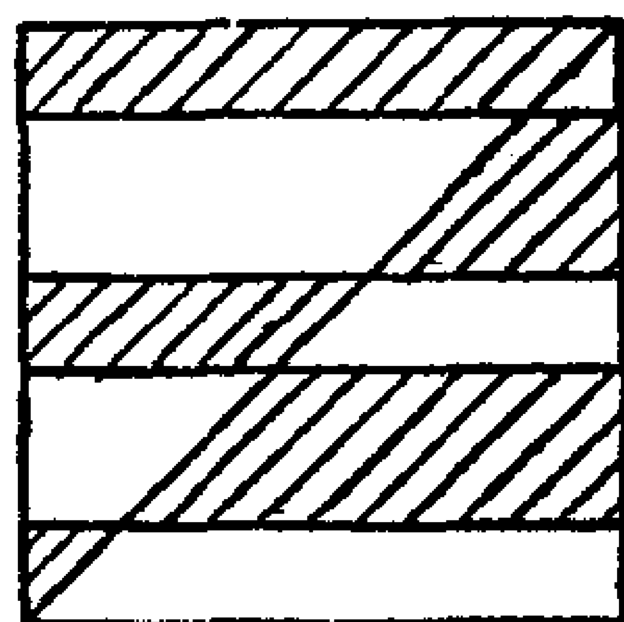


图13

286．装在集装箱里的货物需要运送到宇宙轨道站"礼炮"站．集装箱至少有35个，货物的总重量18吨．现有7个"进步号"运载飞船，其中每一个可把3吨重的货物送入轨道．已知：这些飞船可以同时把35个集装箱送入轨道．证明：它们能立即把全部货物送入轨道．

287．点M、P分别是凸四边形$ABCD$的边BC和CD的中点．已知$AM+AP=a$．证明：四边形的面积小于$a^2/2$．

288．关于x、y、z的方程$x^2+y^3=z^4$有互质的解吗？

289．E是某圆周直径AC上的点．求作过E点的弦BD，使四边形$ABCD$的面积最大．

290．在一个大圆湖的岸上有若干居民点，其中某些居民点之间有内燃机船通航．已知：两个居民点之间能通航当且仅当在随着这两个居民点之后的两个居民点（按反时针方向）之间不通航．证明：可以乘内燃机船从一个居民点到达另外任何一个居民点，且换乘不多于两次．

291．用异于0的6个数字写成的一个6位数能被37整除．

证明：用这个数的数字的重排还可以得到至少23个能被37整除的、不同的6位数．

292. 解方程组：

$$\begin{cases} \sin x+2\sin(x+y+z)=0 \\ \sin y+3\sin(x+y+z)=0 \\ \sin z+4\sin(x+y+z)=0 \end{cases}$$

293. 在平面上给定1980个向量，同时其中有不共线的向量. 已知：任意1979个向量的和向量都与这1979个向量之外的那个向量共线. 证明：这1980个向量的和向量是非零向量.

294. 用$S(n)$表示自然数n的所有数字之和.

1）是否存在自然数n，使$n+S(n)=1980$?

2）证明：任何两个连续自然数中能有一个表示成$n+S(n)$的形式，其中n是某一个自然数.

295. 一张无穷大格纸上的某些格子涂成了红色，其余的涂成了蓝色. 同时，由2×3个格子构成的每一个矩形正好包含两个红格. 问：由9×11个格子构成的矩形中包含有多少个红格?

296. 生活在花城的小矮人忽然都患了流行感冒. 一天若干个小矮人因感冒而生病了，后来虽然谁也没有再感冒，但那些健康的小矮人由于看望自己的病友而生起了病. 已知，每个小矮人患感冒正好一天，同时，在这以后至少有一天他是免疫的（即他身体健康而且在这一天不可能再次生病）. 每个健康的小矮人不顾流行病而每天去看望自己所有的病友. 当流行病开始后，小矮人忘记了接种疫苗.

证明：

1）如果在流行病发生的第一天之前，某些小矮人接种了疫苗且在第一天有免疫力，那么流行病能持续多久?

2）如果在第一天任何人都没有免疫力，那么流行病是早些结束还是晚些结束?

297. 用$P(n)$表示自然数n的所有数字的乘积. 由递推公式$n_{k+1}=n_k+P(n_k)$给出的且第一项$n_1\in N$的数列$\{n_k\}$是否

是无界数列？

298．给定等边三角形ABC．平行于直线AC的某条直线分别与AB、BC相交于M、P．点D是三角形PMB的中心，点E是线段AP的中点．求三角形DEC的各个内角．

299．设长方体的棱长分别为x、y和z厘米（$x<y<z$），而$p=4(x+y+z)$，$s=2(xy+yz+zx)$，$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$分别为长方体的周长、表面积和对角线长．证明：

$$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),$$

$$z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right).$$

300．集合A是整数集合，它的最小元素等于1，最大元素为100．除1外，它的每个元素都等于A中两个元素（可能是相等的两个数）之和．在满足这些条件的一切集合中，求具有最少元素的集合．

301．证明：存在无穷多个数B，使方程

$$[x^{3/2}]+[y^{3/2}]=B$$

至少有1980个自然数解x、y（$[z]$表示不超过z的最大整数）．

302．在四面体$ABCD$中棱AC垂直于BC，AD垂直于BD．证明：直线AC和BD之间的夹角余弦值小于CD/AB．

303．数$x\in[0,1]$表示成十进制小数的形式．把它的小数点之后的前5个数字按任意次序重排后，得到新的小数x_1；再把x_1的小数点后面的第2至第6这五个数字重排之后得到小数x_2．一般地，数x_{k+1}可由数x_k的小数点后面的第$k+1$个至第$k+5$个数字重排得到．

1）证明：在每一步中无论怎样重排数字，所得到的数列x_k始终有极限．

用y表示这个极限．

2）解释：能否利用上述过程，从有理数x得到无理数y。

3）找出那样的分数x，对于它来说，上述过程能把它变成无理数y。

第十五届（1981年）

年级	第一天				第二天			
8	304	305	306	307	315	316	317	318
9	308	307	309	310	319	320	321	322
10	311	312	313	314	323	324	325	326

304. 两个相同的国际象棋盘（8×8个格子）有公共中心，同时其中一个相对于另一个绕着中心转动了45°．如果一个格子的面积为1，求这两个棋盘黑格子的所有相交部分的总面积。

305. 在圆周上给定点A、B、M和N。从点M作弦MA_1和MB_1，它们分别垂直于直线NB和NA。证明：直线AA_1和BB_1平行。

306. 我们说一个数具有性质$P(k)$，如果它能分解成k个大于1的连续自然数的乘积。

1）求那样的k，对于它来说某数N同时具有性质$P(k)$和$P(k+2)$。

2）证明：同时具有性质$P(2)$和$P(4)$的数不存在。

307. 有一张4行的表格。在第一行中写着任意的自然数，这些数之中可能有相同的数。在第二行中这么填数：从左向右看第一行中的数，当看到a时，如果a已在第一行中出现k次．那么就在a的下面填上k。类似地可由第二行写出第三行，由第三行写出第四行。

证明：第二行和第四行总能相同。

308. 给定数a，一矩形的边分别平行于坐标轴O_x和O_y，而且它包含由下列不等式所定义的图形：

$$\begin{cases} y\leqslant -x^2 \\ y\geqslant x^2-2x+a \end{cases}$$

求这个矩形的最小面积。

309. 给定有公共顶点的等边三角形ABC、CDE和EHK（顶点按反时针方向指出），点E在平面上，并且$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$。证明：三角形$BHD$也是等边三角形。

310. 在某一个村子里有1000个居民。每天每个居民都要把昨天打听到的新闻告诉自己所有认识的人。已知任何新闻都要为全体村民所知。

证明：可以这么挑选90个居民，如果把某一条新闻同时告诉他们所有的人，那么10天之后这条新闻就为全体村民所知了。

311. 关于数a、b，已知不等式

$$a\cos x+b\cos 3x>1$$

没有解。证明：$|b|\leqslant 1$。

312. 点K、M分别是凸四边形$ABCD$的边AB、CD的中点，点L、N在另外两条边上使$KLMN$是矩形。证明：四边形$ABCD$的面积是矩形$KLMN$面积的2倍。

313. 求满足以下两个条件的一切自然数列$\{a_n\}$：

1）对于任意n，$a_n\leqslant n\sqrt{n}$。

2）对于任意不同的m、n，a_m-a_n能被$m-n$整除。

314. 能否把一个矩形表格的所有格子涂成白色和黑色，使白格和黑格的数量相等，而在每一行和每一列中四分之三以上的格子有一种颜色。

315. 证明：如果四边形$ACPH$、$AMBE$、$AHBT$、$BKXM$、$CKXP$都是平行四边形，那么$ABTE$也是平行四边形（所有四边形的顶点都按反时针方向写出）。

316．求方程 $x^3-y^3=xy+61$
的自然数解x、y。

317．在足球锦标赛中18个队彼此之间进行了8轮比赛，即每个队与8个不同的队进行了比赛．证明：存在3个队，它们彼此之间暂时还没有进行过任何比赛．

318．在三角形ABC的三条边AB、BC和CA上分别取点C_1、A_1、B_1，使$AC_1:C_1B=BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=1/3$。

证明：三角形ABC的周长P和三角形$A_1B_1C_1$的周长p之间有下列关系：

$$\frac{1}{2}P<p<\frac{3}{4}P.$$

319．证明：如果正数x、y满足方程$x^3+y^3=x-y$，那么$x^2+y^2<1$。

320．一个学生要临摹一个凸多边形，这个凸多边形在半径为1的圆内．他首先画好了一条边，然后从它的一端作第二条边，从第二条的一端作第三条边，等等．画完之后，他发现多边形没有合拢，而他所画的第一个顶点和最后一个顶点之间的距离为d。已知这个学生准确地画出了角，而在画每一条边的长度时相对误差不超过p。证明：$d\leqslant 4p$.

321．立方体的每个顶点上写着一个数，每次可以同时把1分别加到在任何一条棱上的两个数上．如果最初在顶点上的数是1）如图14—1所示，2）如图14—2所示，3）如图14—3所示，

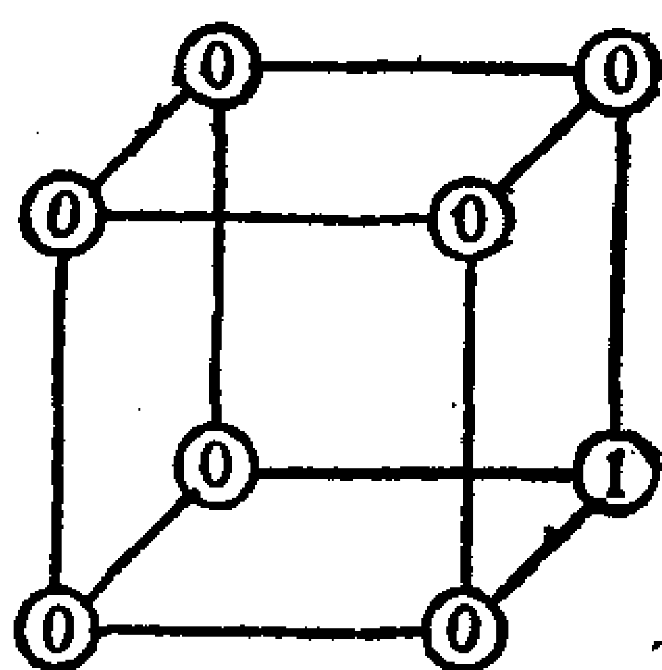


图14—1

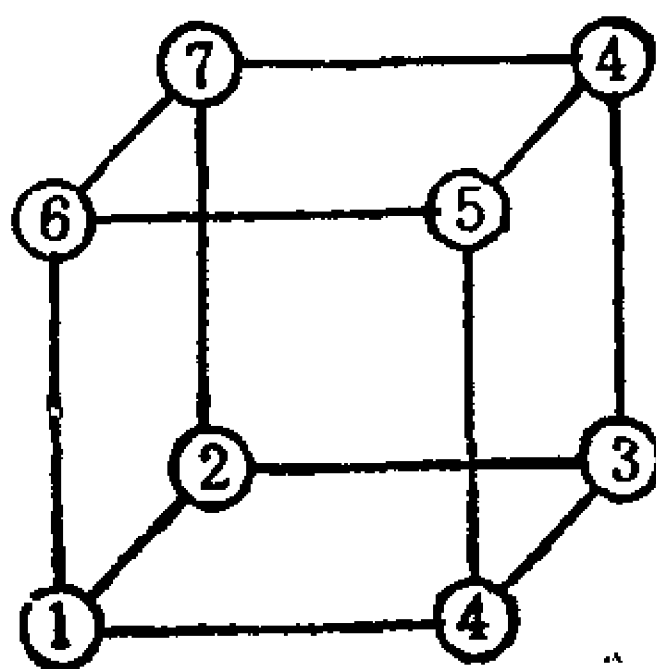


图14—2

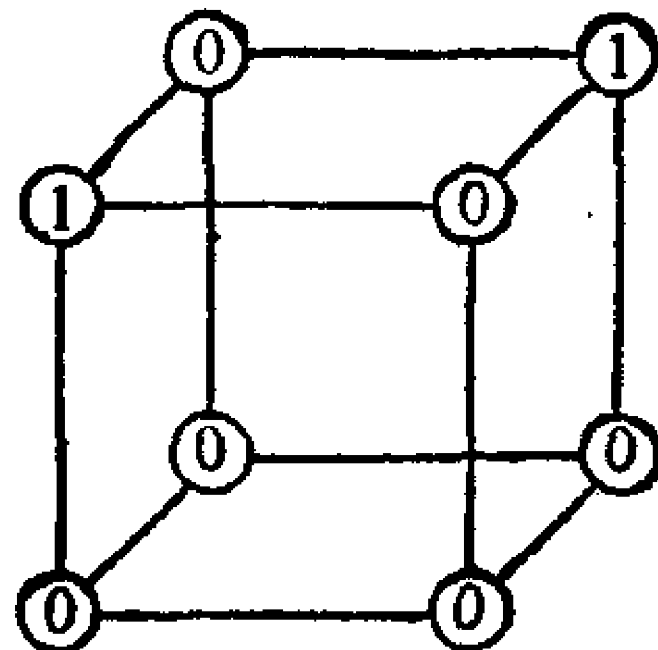


图14—3

问：经过若干次那样的添加数之后，能否把立方体顶点上的8个数变成彼此相等的数？

322. 求自然数n，使n、$n+1$、$n+2$、$n+20$中的每一个数与数$30030=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$有大于1的公因子.

323. 在每张卡片上分别写着从100至999的一个自然数. 卡片字朝下放到桌子上后把它们弄混并摞成一摞，然后依次打开这摞中的卡片且把它们分类，按照所写数的末位数字分成小堆，字朝上. 在第一堆里是末位数字为0的所有数，在第二堆里是末位数字为1的所有数，等等. 接着再把这些小堆摞成一摞，第一堆在最下面，第二堆在第一堆上面，接着是第三堆，最后是第十堆. 把得到的这摞卡片倒过来再次把它们分类，但按第二个数字把它们分成小堆. 再次把所得的小堆摞成一摞，做法同前（按第二个数字增加的次序）. 再最后一次把它们分类，按照首位数字来分小堆并把小堆再摞成一摞. 在最后一次分类后所得到的一摞卡片中，卡片将按什么次序排列着？

324. 在3厘米×4厘米的矩形中有6个点. 证明：存在两个点，它们之间的距离不大于$\sqrt{5}$厘米.

325. 1）求多项式

$$P(x, y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$$

的可能最小值.

2）证明：这个多项式不可能表示成关于变量x、y的多项式的平方和形式.

326. 线段AD、BE、CF是正三角棱柱的侧棱，在它的底面ABC上求与直线AE、BF、CD等距离的所有点.

第十六届（1982年）

年级	第一天				第二天			
8	327	328	329₁)	330	337	338	339	340
9	331	332	333	334	341	342	343	344
10	335	332	329₂)	336	345	346	347	348

327．在圆心为O_1、半径为r_1的圆周上取点M和K，圆心为O_2、半径为r_2的圆周内切于圆心角MO_1K．求四边形MO_1KO_2的面积．

328．数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$从第三项起的每一项都等于它的前两项之和，而且$a_1=1$，$a_2=2$，$b_1=2$，$b_2=1$．问：有多少个同时在两个数列中出现的数？

329．1）设m和n是自然数．证明：如果对于某些非负整数k_1、k_2、…、k_n，数$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}$能被$2^m-1$整除，那么$n\geqslant m$．

2）是否存在能被$\underbrace{111\cdots1}_{m个1}$整除且数字和小于$m$的自然数？

330．立方体的每个顶点上放着一个非负实数，且所有这些数之和等于1．两个人做游戏，第一个人挑选立方体的任何一面，第二个人挑选另一面，最后第一个人挑选立方体的第三个面．同时平行于已选的面不能再被挑选．

证明：第一个人可以这么做，使所选择的三个面的公共顶点对应的数不超过1/6．

331．有一次3个男孩在图书馆相遇．其中一个男孩说："现在我将每隔一天来一次图书馆"．第二个声明，他将每隔两天来一次图书馆，第三个则说将每隔三天来一次图书馆．听到他

们交谈的图书馆管理员指出，每逢星期三图书馆休息．孩子们回答说，如果他们当中的某个人来的那一天恰好碰上图书馆的休息日，那么他就在第二天再来，并且以后来图书馆的时间将从这一天算起．孩子们都这么做了．有一次星期一他们又重新在图书馆相遇了．问：上面所描述的谈话是发生在星期几？

332．在不是菱形的平行四边形$ABCD$中，对角线长度之比为$AC:BD=k$．设射线AM关于直线AC对称于射线AD，射线BM关于直线BD对称于射线BC．M是射线AM和BM的公共点．求比例$AM:BM$．

333．在圆周上标出$3k$个点，它们把圆周分成$3k$条弧，其中k条弧的长度为1，另外k条弧长为2，其余k条弧长为3．证明：在所标出的点中，存在两个点，它们的连线是圆周的直径．

334．在四面体内部任取点M．证明：四面体至少存在一条棱，使点M对它的视角的余弦值不大于$-\frac{1}{3}$．

335．数a、b、c在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内，且满足$\cos a=a$，$\sin\cos b=b$，$\cos\sin c=c$．把这些数按递增的顺序排列起来．

336．闭折线M有奇数个顶点，依次为A_1、A_2、…、A_{2n+1}用$S(M)$表示新的闭折线，它的顶点B_1、B_2、…B_{2n+1}依次是折线M的每一条边的中点：B_1是线段A_1A_2的中点，B_2是A_3A_4的中点，…B_{n+1}是$A_{2n+1}A_1$的中点，B_{n+2}是A_2A_3的中点，…，B_{2n+1}是$A_{2n}A_{2n+1}$的中点．

证明：在用以上方式所作的折线序列$M_1=S(M)$，$M_2=S(M_1)$，$M_3=S(M_2)$，…，$M_k=S(M_{k-1})$中存在一条闭折线，它与初始折线M同位相似．

337．1至1982的自然数按照某种次序一个接一个地排列着．计算机从左向右读依次相邻的两个数（第1个和第2个，第2个和第3个，等等），直到最后的两个数为止．而且如果在所读过的

两个数中，如果较大的数在左边，则计算机改变它们的位置．接着计算机再从右向左同样读一遍，并且按照上面的规则改变两个数的位置．读完之后得到了信息：在第100个位置上的数两次都未改变自己的位置．求出这个数．

338．流经花城的黄瓜河在码头地区有若干岛屿，它们的总周长等于8米．小精灵断定，可以乘坐小船离开码头渡到对岸去，且航行不到3米．在码头地区的河岸互相平行，而河的宽度等于1米．问：小精灵的判断对吗？

339．在坐标平面O_{xy}上画了函数$y=x^2$的图象，然后擦去坐标轴，仅留下抛物线．问：如何利用圆规和直尺来复原坐标轴和长度单位？

340．在$n\times n$个格子的正方形表格中填满了数，同时在有公共边的格子中写着彼此相差不超过1的数．证明：至少有一个数在表格中出现：

1）不少于$[n/2]$次（$[a]$表示数a的整数部分）．

2）不少于n次．

341．证明：对于一切正数x，不等式

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$$

成立．

342．从数1、2、3、…、1982的集合中删去一些数，使得在剩下的数中任何一个数都不等于其它两个数的乘积．问：最少需要删去多少个数才能做到这一点？如何做到这一点？

343．在无穷大格纸的每个格子中写着某个实数．证明：存在某个格子，在这个格子中所写的数不超过在它周围8个格子中的至少4个格子内所写的数．

344．证明：从任何实数列a_1，a_2，…，a_n中可以挑选某些数，使它们满足下述3个条件：

1）不接连挑选3个数，

2）从每3个依次相邻的数中至少挑选一个，

3）所挑选的一切数之和的绝对值不小于

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{6}.$$

345. 在$n\times n$个格子的正方形表格中标出$n-1$个格子. 证明：用行与行之间的重排和列与列之间的重排可以使所标出的一切格子都在表格的对角线的下方.

346. 证明：对于任何自然数n和任何实数a，不等式

$$|a|\,|a-1|\,|a-2|\cdots|a-n|\geqslant\langle a\rangle\frac{n!}{2^n}$$

成立. 其中$\langle a\rangle$表示从数a到离它最近的整数之间的距离. $n!=1\cdot2\cdots n$.

347. 1）是否存在关于变量x、y、z的多项式$P=P(x,y,z)$，$Q=(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$使恒等式

$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1$ 成立？

2）对于恒等式

$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1$

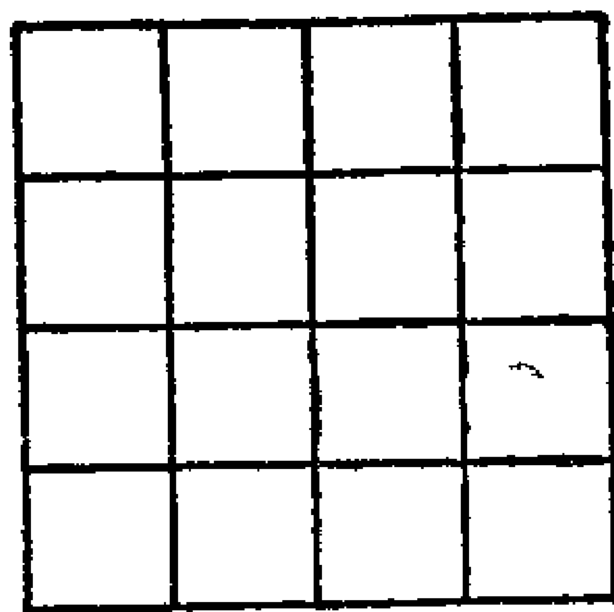
上问题中的多项式存在吗？

348. 四面体$KLMN$的所有顶点都在另一个四面体$ABCD$的内部、界面上或者棱上，证明：四面体$KLMN$的所有棱长之和小于四面体$ABCD$的所有棱长之和的4/3倍.

第十七届（1983年）

年级	第一天				第二天			
8	349	350	351	352	360	361	362	363
9	353	354	355	356	364	365	366	367
10	357	354	358	359	360	368	369	370

349. 在图15所示的网中，每一孔的尺寸是1×1. 问：能否把这个网表示为以下集合的并集：


图15

1 ）每一条长度为5的8条折线.

2 ）每条长度为8的5条折线？

350. 在黑板上写了3个整数，然后擦去其中的一个，并代之以剩下的两数之和与1的差. 重复这个步骤若干次，最后得到了数17、1967、1983. 问：最初在黑板上写的数能否是以下的数：

1 ）2、2、2，

2 ）3、3、3？

351. 三个圆两两外切于点X、Y、Z. 然后把这些圆的半径都扩大到原来的$2/\sqrt{3}$倍，且圆心不变. 证明：三角形XYZ的每一个点至少被半径扩大后的一个圆所覆盖.

352. 给定界于两个连续自然数的平方数之间的若干个不同的自然数. 证明：它们的两两乘积也不相等.

353. 求方程组

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^3 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

的一切解.

354. 十进制的自然数k有n个数字. 把这个数四舍五入精确到十位：如果末位数字大于4，则用0取代末位数字，并在十位上增加1. 再把所得到的数用类似的四舍五入的方法精确到百位，等等. 在第$n-1$次四舍五入后得到了数$\bar{k}$. 证明：$\bar{k} < 18k/13$.

355. 在三角形ABC中，点D是AB边的中点，点E、F分别在线段AC、BC上. 证明：三角形DEF的面积不超过三角形ADE和三角形BDF的面积之和.

356. 分别由整数$[(\sqrt{10})^n]$、$[(\sqrt{2})^n]$的末位数字

构成的数列｛α_n｝、｛β_n｝是循环数列吗？（这里〔x〕表示x的整数部分。）

357．两个锐角α和β满足方程

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta),$$

证明：$\alpha+\beta=\pi/2$．

358．四面体$ABCD$的顶点被垂直投影到两个平面．点A_1、B_1、C_1、D_1和A_2、B_2、C_2、D_2分别是顶点对两个平面的投影．证明：可以在空间中移动其中的一个平面，使直线A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2变成平行线．

359．一个学生练习解二次方程．他在解一个方程并求出它的两个根后，就按以下规则列出新的方程：新方程的常数项等于较大的根，变量x的系数等于较小的根，x^2的系数等于1．证明：这个练习不能无限制地进行下去．问：这个学生最多能解多少个这样的方程？

360．有自然数m、n、k，使得m^n能被n^m整除，n^k能被k^n整除．证明：数m^k能被k^m整除．

361．在阿巴部落里有两个字母．已知这种语言的任何单词都不是另一个单词的词头．问：这个部落的语言词典能否包含：3个单词有4个字母、10个单词有5个字母、30个单词有6个字母、5个单词有7个字母？

362．有一张无穷个格子的格纸．问：能否把整数放到格子中，使在每一个有4×6个格子的、且边在格线上的矩形中所有数之和等于：

1）10，2）1？

363．在图16中用斜线标出的四个三角形面积相等．证明：没有用斜线标出的三个四边形面积也相等．如果一个三角形的面积等于

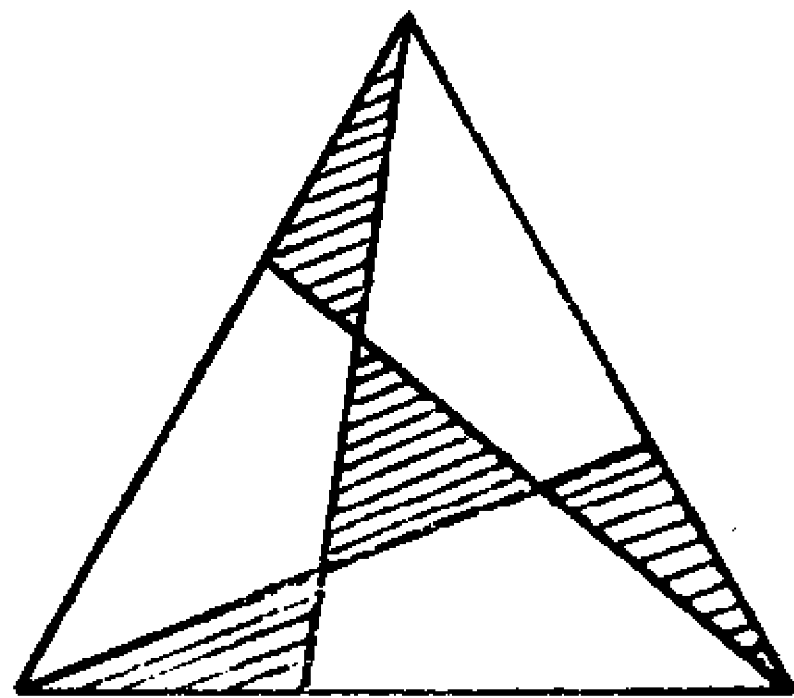


图16

$1cm^2$，那么一个四边形的面积等于多少？

364．一群幼儿园的儿童一对接一对地列好了队．同时已知，在每一纵列里男孩和女孩的数量相等．而有一个女孩和一个男孩的对数等于其余的对数．证明：这群儿童的数量能被8整除．

365．矩形的两条平行边的长度等于1cm．此外，已知这个矩形由两条相互垂直的直线分成4个矩形，其中3个的面积不小于$1cm^2$，而第4个不小于$2cm^2$．问：矩形的另外两条边至少多长时才能做到这一点？

366．在三角形ABC的内部任选点O．证明等式

$$S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=0,$$

其中S_A、S_B、S_C分别为三角形BCO、CAO、ABO的面积．

367．证明：在绝对值不超过$2m-1$的任意$2m+1$个不同的整数中，可以找到三个数，它们的和等于0．

368．在三角形ABC的三条边AB、BC、CA上（但不在顶点上）分别选取点D、E、F．用d_0、d_1、d_2、d_3分别表示三角形DEF、ADF、BDE、CEF中最长边的长度．证明：

$d_0\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\min\{d_1, d_2, d_3\}$什么时候等号成立？

369．集合M由k条两两不相交的、且在一条直线上的线段组成．已知，可以把长度不超过1的任何线段放到直线上，使它的两个端点属于集合M．证明：组成集合M的所有线段长度之和不小于$1/k$．

370．在实数a的无穷十进制展开式中有一切数字．设v_n是这个展开式中长为n的不同数字段的个数．证明：如果对于某一个n，条件$v_n\leqslant n+8$成立，那么数a是有理数．

第 十 八 届（1984年）

年级	第一天	第二天
8	371 372 373 374	383 384 385 386
9	375 376 377 378	387 388 389 390
10	379 380 381 382	391 392 393 394

371. 1）n个整数的积等于n，和等于零．证明：数n被4整除．

2）设n为被4整除的自然数．证明：可以找到n个整数，使其积为n，其和为零．

372. 证明：对于任何非负的数a和b，不等式

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\quad 成立．$$

373. 在平面内有两个等边三角形$A_1B_1C_1$和$A_2B_2C_2$，它们的顶点按顺时针方向标出．从任意一点O引出分别等于$\overrightarrow{A_1A_2}$．$\overrightarrow{B_1B_2}$，$\overrightarrow{C_1C_2}$的向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$．证明：点A，B，C也是等边三角形的顶点．

374. 有四种颜色和无数多个边长为1的小正方块．在小正方块的边上涂色，使得每个正方块的各边的颜色均不相同，并将同一颜色的边粘在一起．当m和n是怎样的数时，由这些小正方块可以粘成大小为$m\times n$的矩形，其每一边上都涂着同一颜色，而所有边的颜色又各不相同．

375. 证明：对于所有实数$x>0$，$y>0$及所有实数α，不等式

$$x^{\sin 2\alpha}\cdot y^{\cos 2\alpha}<x+y\quad 成立．$$

376. 有一个正方体和两种颜色：红色和绿色．两个人做这样的游戏：一人先选取正方体的三条棱，并将它们涂上红色．他

的对手从没有涂色的棱中选三条，并将它们涂上绿色。在这之后，第一个人重新取三条棱涂上红色，而后他的对手再取三条棱涂上绿色。不准将棱改涂成别的颜色，或者两次涂上同一种颜色。谁第一个能把任何一面的所有棱都涂上自己的颜色，就算谁胜。试问：如果第一个人采取正确的策略，他一定能获胜，对吗？

377．沿着圆周写上$n\geqslant 3$个这样的自然数：使得与其中每一个数相邻的两数之和与该数的比也是自然数。证明：所有这样的比值之和满足：1）不小于$2n$；2）小于$3n$。

378．圆O内切于三角形ABC，与边BC，AC，AB分别切于点A_1，B_1，C_1。线段AO，BO，CO与圆周分别交于点A_2，B_2，C_2。证明：直线A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2交于一点。

379．什么样的整数m和n满足等式

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n?$$

380．把n个不同的实数按递增顺序写成一行。再把这些数写成第二行，不过，可能这些数排列的次序与上一行不相同。计算上下对齐的两个数之和，这些和就构成了第三行。结果第三行中的数也按递增顺序排列。证明：第一行与第二行相同。

381．已知三角形ABC。过点P引直线PA，PB，PC，交三角形的外接圆于点A_1，B_1，C_1（它们异于三角形的顶点），使得三角形$A_1B_1C_1$全等于三角形ABC。证明：具有上面所指性质的点P不多于8个。

382．正数x，y，z满足方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25, \\ \dfrac{y^2}{2}+z^2=9, \\ z^2+zx+y^2=16. \end{cases}$$

求$xy+2yz+3zx$的值。

383．老师在黑板上写下二次三项式$x^2+10x+20$，然后每

个学生依次上去将一次项x的系数或常数项（两者不能同时）增加或减少1．结果在黑板上得到二次三项式$x^2+20x+10$．试问：在某一时刻黑板上所出现的二次三项式有整数根，对吗？

384．半径为r的硬币这样在平面上移动，使它的中心沿凸多边形的边界绕行，这个凸多边形的周长为P并外切于半径为R（$R>r$）的圆．求硬币轨迹所构成图形的面积(多边形的环)．

385．有$n+1$个砝码，总重量为$2n$，每个砝码的质量都是自然数．天平的两个秤盘处于平衡状态．将砝码逐个放到天平秤盘上去：首先放最重的(或是最重者之一)，然后放余下砝码中最重的，如此继续下去．同时，后面的每一个砝码要放到当时较轻的秤盘上．如果天平两边处于平衡状态，那么可放到任意一边的秤盘上．证明：当所有砝码都放到天平上去时，天平处于平衡状态．

386．如果一个自然数是质数，并且任意重排它的数字后所得的数仍是质数，那么这个自然数叫作绝对质数．证明：在绝对质数中，不能含有多于三个不同的数字．

387．数字$x\neq0$和y是这样的数字：对于任意$n\geqslant1$，数$\underbrace{xx\cdots x}_{n}6\underbrace{yy\cdots y}_{n}4$都是某个整数的平方．求出所有这样的$x$和$y$．

388．在直线上有四个不同的点，依次记作A，B，C，D．证明：对于不在直线AD上的任意一点E，不等式

$$AE+ED+|AB-CD|>BE+CE$$ 成立．

389．数列x_n以递推形式给出：

$$x_1=1,\ x_2=1;$$

$$x_{n+2}=x_{n+1}^2-\frac{1}{2}x_n \qquad (n\geqslant1).$$

证明：数列x_n有极限，并求出这个极限．

390．在尺寸为1983×1984的国际象棋盘的白格中写着数+1和−1，使与每一个黑格相邻的白格之中所有数的乘积等于1．

证明：只有当所写的数都等于1时才能做到这一点。

391．在3×3的表格的方格中写着数1或－1，然后每格上的数用所有与它相邻的格（有相邻的公共边的格）中的数之积来代替．证明：经过若干次这样的变换后，所有方格中的数都是＋1．

392．比较$\frac{2}{201}$和$\ln\frac{101}{100}$的大小．

393．在同一平面上有三个圆c_1，c_2，c_3，它们的中心分别为c_1，c_2，c_3，半径分别为r_1，r_2，r_3，每个圆都在其他两圆之外，且$r_1>r_2$；$r_1>r_3$．圆c_1和圆c_2的外公切线的交点A在圆c_3的外部，圆c_1和圆C_3的外公切线的交点B在圆c_2的外部．从点A引圆c_3的切线，并从点B引圆c_2的切线．证明：这两对切线所围成的四边形有内切圆，并求内切圆的半径．

394．证明：经过正方体中心的任一截面的面积不小于正方体的一个侧面的面积．

第十九届（1985年）

年级	第一天				第二天			
8	395	396	397	398	407	408	409	410
9	399	400	401	402	411	410	412	413
10	403	404	405	406	414	415	416	417

395．在锐角三角形中，由各边的中点向其它两边引垂线．证明：由这些垂线所围成的六边形的面积等于三角形面积的一半．

396．是否存在具有下列性质的自然数n：（十进制的）数n的各位数字之和等于1000，而数n^2的各位数字之和等于1000^2？

397．在8×8个格的跳棋盘里最多可以布置多少个王棋，使得每一个王棋至少能被另一个王棋“进攻”？

398．把正n边形的每条边及每条对角线涂上任意一种颜色，使得这些线段中有公共点的任意两条线段涂有不同的颜色，为此最少需要几种颜色？

399．在平面上给定直线l，直线外一点O及任意一点A．证明：只要运用关于直线l的轴对称及关于点O的旋转，就可将点O变换成点A．

400．给定二次三项式ax^2+bx+c，其中$a>100$．试问最多有多少个不同的整数点，使其绝对值不超过50？

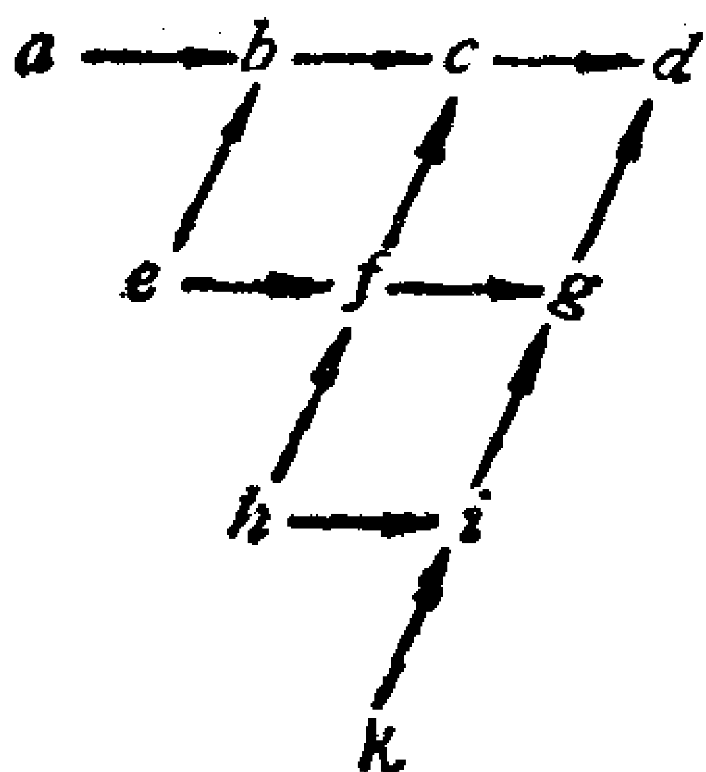


图17

401．将不同的自然数$a, b, \cdots, k$写成下表形式（图17）：已知图中两个箭头所指的每一个数等于位于这两个箭头始端的数之和．求按这样排列的d的最小值．

402．给定严格递增的无界的正数序列$a_1, a_2, \cdots$，证明：

1）存在号码k_0，使得对于一切$k \geqslant k_0$不等式

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1 \quad 成立．$$

2）对于所有充分大的号码k，不等式

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985 \quad 成立$$

403．求出满足

$$|\sin x-\sin y|+\sin x \cdot \sin y \leqslant 0$$

的所有数对(x, y)．

404．在平面上有一个凸五边形$ABCDE$．作点A关于B的对称点A_1，点B关于点C的对称点B_1，…，点E关于点A的对称点E_1，然后抹去五边形$ABCDE$．证明：在已知点A_1, B_1, C_1, D_1, E_1位置的情况下，利用圆规和直尺可以复原五边形$ABCDE$．

405．由下列规则给出数列$a_1, a_2, a_3, \cdots$：

当$n\geqslant 1$时，$a_{2n}=a_n$；

当$n\geqslant 0$时，$a_{4n+1}=1$，$a_{4n+3}=0$。

证明：这个数列不是周期数列。

406．在平面上有n（$n>2$）条直线，把平面分成若干区域。其中的一些区域被涂上颜色，并且任意两个涂色的区域的边界都不能相邻。证明：涂色区域的数目不超过$\frac{1}{3}(n^2+n)$。

407．有一个正方体，一个同样大小的带盖的正方体盒子和六种颜色。每种颜色只涂正方体的一面和盒子的一面。证明：可用适当的方式将正方体放到盒子里，使得正方体的每一面和与它紧贴的盒子的那一面所涂的颜色不同。

408．直径A_0A_5把圆O分成两个半圆，再把其中一个半圆分成五段等弧$\overset{\frown}{A_0A_1}$，$\overset{\frown}{A_1A_2}$，$\overset{\frown}{A_2A_3}$，$\overset{\frown}{A_3A_4}$，$\overset{\frown}{A_4A_5}$。直线A_1A_4交OA_2、OA_3于点M、N。证明：线段A_2A_3和MN的长度之和等于圆的半径。

409．学校数学小组的同学做成一种计算器，按下按钮可将四数组（a，b，c，d）变成四数组（$a-b$，$b-c$，$c-d$，$d-a$）。证明：如果开始的四数组的数不全相等，那么按几次按钮后得到的四数组的数至少有一个大于1985。

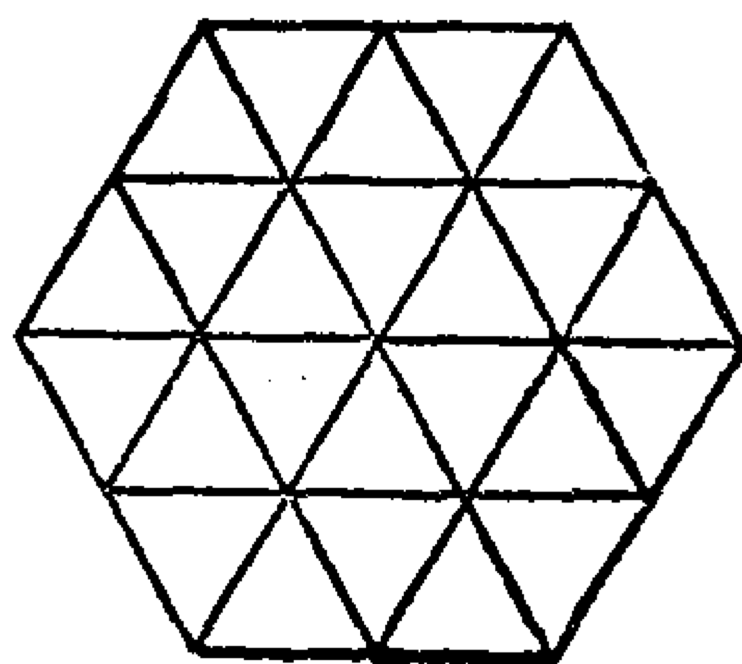
410．将1，2，3，…，$2n-1$，$2n$分成两组，每组n个数。设$a_1<a_2<\cdots<a_n$是按递增顺序写出的第一组数；$b_1>b_2>\cdots>b_n$是按递减顺序写出的第二组数。证明

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=n^2.$$

411．由同样大小的小正方体组成一个长方体，它的有公共顶点的三个面涂上了颜色，结果所有小正方体的一半至少有一面被涂上了颜色。试问被涂上颜色的小正方体有多少个？

412．半径均为R的两个圆中的一个经过平行四边形$ABCD$的顶点A和B，另一个圆经过顶点B和C。证明：如果M是这两个圆的第二个交点，那么三角形AMD的外接圆的半径等于R。

413. 正六边形被分割成24个三角形。在图18所示图形的19个结点处写下不同的数。证明：在被分割出的24个三角形中，至少有7个三角形的顶点处的三个数是按逆时针方向以递增顺序书写的。


图18

414. 解方程

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{\vdots}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1$$

（在左边的表达式中有1985个2）。

415. 在边长为1 cm的正五边形内，去掉与五边形各顶点距离小于1 cm的所有点，求剩下部分的面积。

416. 在宽大无边的方格纸上（每个小方格的边长为1），规定只允许沿着小方格的边线剪开。证明：对任意整数$m>12$，可以剪出一个面积大于m的矩形，但不能再从这个矩形中剪出一个面积为m的矩形。

417. 正方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的棱长为1 cm。求正方体底面$ABCD$的内切圆上的点与过顶点A、C和B_1的圆上的点之间的最小距离。

第 二 十 届（1986年）

年级	第一天				第二天			
8	418	419	420	421	430	431	432	433
9	422	423	424	425	434	433₂）	435	436
10	426	427	428	429	437	438	439	440

418. 方程$x^2+ax+b+1=0$的根是自然数。证明：a^2+b^2是

合数.

419. 两个相同的正方形交叉成一个八边形，其中一个正方形的边是兰色的，而另一个正方形的边是红色的. 证明：八边形的兰色边长之和等于红色边长之和.

420. 点M是锐角三角形ABC的AC边上一点，作三角形ABM和BCM的外接圆. 试问：当点M在什么位置时两外接圆所围成的公共部分的面积最小？

421. 一个国王打算建造n座城市，并在它们之间修建$n-1$条道路，使得从每一个城市都可以通往任何其它的城市（每一条道路连接两座城市，所有道路不相交，并且不穿过别的城市）. 国王要求：沿着道路网两座城市之间的最短距离分别是1，2，3，…，$\frac{n(n-1)}{2}$（km），如果1）$n=6$；2）$n=1986$，试问国王的愿望能实现吗？

422. 证明：在坐标平面上不能画出这样的凸四边形：它的一条对角线的长是另一条对角线长的两倍，且对角线之间的夹角等于45°，而每个顶点的坐标都是整数.

423. 证明：在有$m\times n$个方格的矩形表格中，可以填上不同的自然数的平方数，使得每行数的和以及每列数的和也是自然数的平方.

424. 中心距为d的两个圆周相交于点M、N，分别过点M、N及第一个圆周上异于M、N的点A作直线，交第二个圆周于B、C.

1）证明：三角形ABC的外接圆的半径等于d.

2）如果点A跑遍第一个圆周，求三角形ABC外接圆中心的轨迹.

425. 在平面上给定一个正六边形，将它的每一边分成1000等分，并用平行于六边形各边的线段将分点连接起来. 在所得的网中选择任意三个结点，使它们是任意大小和位置的正三角形的顶点，并把它们涂上颜色. 用这种方法继续对三个结点涂色，直

到不能进行为止。证明：如果有一个结点没有涂色，那么它不能是原六边形的顶点。

426。求所有这样的自然数：它们中的每一个等于它自己所有因数个数的平方。

427。证明：对于任意正数a_1，a_2，…，a_n，不等式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

成立。

428。过三角形ABC（$AB \neq AC$）的顶点A引各种直线。证明：它们中的任何一条直线至多有一个异于三角形的顶点且满足条件$\angle ABM=\angle ACM$的点M。试确定：上述所作直线中什么样的直线不包含任何这样的点M。

429。棱长n（$n \geqslant 3$）的正方体，由n^3个单位小正方体组成。证明：可在这n^3个小正方体中各写上不同的整数，使得在平行于正方体棱的任何一列小正方体中的数之和等于零。

430。十进制的自然数a由n个相同的数字x组成，而数b由n个相同的数字y组成，数c由$2n$个相同的数字z组成。对于任何$n \geqslant 2$，求出使得$a^2+b^2=c$成立的数字x，y，z。

431。在凸十二边形内给定两个点，它们彼此相离10厘米。证明：这两个点到十二边形各顶点距离之和的差小于1米。

432。把牛奶分倒在30个杯子里。一个小男孩想使所有杯子里的牛奶分得均匀。为此，他每次任取两个杯子，并将其中一个杯子的牛奶向另一个杯子里倒，直到它们的牛奶的数量相等为止。可否在杯子里分倒适量的牛奶，使小男孩采用上述方法无论如何也达不到他的目的？

433。一个矩形被平行于边的直线分割成边长为1的小正方形，像国际象棋盘那样将小正方形涂上黑白色。矩形的对角线也

被分割成黑色和白色的线段．如果矩形的大小是1）100×99；2）101×99，求白色线段长度之和与黑色线段长度之和的比．

434．在平面上给定正n边形$A_1A_2\cdots A_n$．

1）证明：如果n是偶数，那么对于平面上任意一点M，表达式$\pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\cdots+\overrightarrow{MA_n}$中可适当选取正、负号，使所得的和等于0．

2）证明：如果n是奇数，那么仅对于平面上有限个M点，才能对上述表达式借助于正、负号的选择，使所得的和为0．

435．在大小为$n\times n$（$n\geqslant3$）的正方形表格中，按下列法则在它的正方格中填上±1：

（1）表格边缘上的所有小方格中填上-1；

（2）在空格中，依次填上与该格同行或同列上它的两侧最靠近的两格已填的数之积．

这样做下去，直到表中的空格被填满为止．求：

1）在表中可能得到$+1$的最多个数；

2）在表中可能得到$+1$的最少个数．

436．证明：对每个自然数n，不等式

$$|\sin1|+|\sin2|+\cdots+|\sin(3n-1)|+|\sin3n|>\frac{8n}{5}$$

成立．

437．证明：所有形如$\frac{1}{mn}$的数之和不是整数，其中m，n是自然数，且$1\leqslant m<n\leqslant1986$．

438．正方形和三角形都外切于半径为1的圆．证明：正方形和三角形的公共部分的面积大于3.4．能否断定这个面积大于3.5？

439．如果一个多项式的所有系数等于0，1，2或3，就称该多项式为相容的．对于给定的自然数n，求满足条件$P(2)=n$的所有相容多项式的个数．

440．考虑外切于给定球面的所有四面体$AXBY$．证明：对于固定点A和B，空间四面体的内角和即

$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX$的值与$X$和$Y$的选择无关．

第二十一届（1987年）

年级	第一天				第二天			
8	441	442	443	444	452	453	454	455
9	445	446 1)	447	448	456	457	458	459
10	449	450	451	446 2)	455	460	461	462

441．10名运动员参加乒乓球循环赛，其中每两人彼此恰好比赛一场．在比赛的过程中，第一名选手胜x_1场，败y_1场，第二名选手胜x_2场，败y_2场，等等．证明

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2.$$

442．已知利用6个一组的砝码可以使重量是连续自然数的63个重物平衡．求出这组砝码．

443．给定正七边形$A_1A_2\cdots A_7$．证明

$$\frac{1}{A_1A_5}+\frac{1}{A_1A_3}=\frac{1}{A_1A_7}.$$

444．《海战》游戏在7×7个方格的正方形盘上进行．如果已知四甲板战船

1）有形式 ▭▭▭▭；

2）由边彼此相连的四个方格组成

为了保证击中它，至少须射击多少次？

445．证明：对每个自然数n

$$1^{1987}+2^{1987}+\cdots+n^{1987}$$

不能被$n+2$整除。

446. 1)在8×8格的正方形中，至少须放置多少块形如 ⊞ 的图形，使得若要再多放进一个这样的图形就必须把它们重叠起来?

2)在1987×1987个格子的正方形中，随意剪去1格，证明：余下的部分总可以完全分割成若干个形如 ⊞ 的三格"角"。

447. 引三条直线分别平行于三角形的三条边，每条直线与它所平行的边之距离恰等于该边的长度。同时，对于每条边，平行于它的直线和该边所对的顶点位于该边的两侧。证明：三角形各边延长线与所引的三条直线的交点同在一个圆周上。

448. 在平面上给定两条封闭的折线，每条折线有奇数条边，这些边所在的直线各不相同，并且其中的任何三条都不交于一点。证明：可在每条折线中选取一条边，使得它们可作为某个凸四边形的对边。

449. 求出这样的一组五个不同的自然数，使得其中任意两个数互质，而任意若干个数之和为合数。

450. 证明：如果凸五边形$ABCDE$有$\angle ABC=\angle ADE$，$\angle AEC=\angle ADB$，那么$\angle BAC=\angle DAE$。

451. 求出所有这样的α值，使得对于每个α

$\cos\alpha$，$\cos2\alpha$，$\cos4\alpha$，$\cos8\alpha$，…，$\cos2^n\alpha$是只由负数组成的数列。

452. 正数a，b，c，A，B，C满足条件$a+A=b+B=c+C=k$。证明

$$aB+bC+cA\leqslant k^2.$$

453. 在1987×1987的正方形表格的每格中，写上一个绝对值不超过1的数，并使给定表格中任意2×2的正方形中的数之和均等于0。证明：在正方形表格中的所有数的和不超过1987。

454. $\angle ABC$的顶点B在圆周外，而射线BA与BC与圆周相交。由BA与圆周的交点K引直线垂直于$\angle ABC$的平分线，该直线交圆周于另一点P，交射线BC于M。证明：PM的长度为圆心至$\angle ABC$平分线距离的两倍。

455. 两个游戏者轮流地在黑板上记下不超过p的自然数，游戏规则是：禁止在黑板上再写出已有数的因数，轮到的游戏者无法再写时则被认为是输了。

1）当$p=10$时，游戏者中谁有获胜的策略，请指明之。

2）当$p=1000$时，游戏者中谁有获胜的策略？

456. 黑海老人每天晚上都从33名勇士中指定9或10名勇士去值班，试问：最少经过多少天才能使每个勇士值班的次数相等？

457. 在整数格点中，有标记的结点的集合是非空的。此外，再给定一组（有限个）有整数坐标的非零向量组。如果将已知的有限向量组的向量的始端放置在任何一个有标记的结点处，那么它们的终端落在有标记结点上的比落在没有标记结点上的多。证明：有标记的结点有无限多个。

458. 凸p（$p\geqslant5$）边形被所有对角线所分割。证明：在这种情况下，所得的各部分中必有面积不等的部分。

459. 集合T_0由一切形如$(2^K)!$的数构成，$k=0, 1, 2, \cdots$。对于每一个$p=1, 2, \cdots, 1987$，集合T_p是将能表示为集合T_{p-1}中若干个不同数之和的所有数添加到T_{p-1}上所构成。证明：至少有一个自然数不属于集合T_{1987}。

460. 定义在整个数轴上的函数$y=f(x)$的图象，在绕坐标原点旋转$\frac{1}{2}\pi$角度后，变为自身。

1）证明：方程$f(x)=x$恰有一个解。

2）举出这样函数的例子。

461. 凸多面体的各侧面都是三角形。证明：可将它的每条

棱分别地涂上红色或兰色，使得从多面体的任一顶点可只沿着红色的棱运动到另一顶点；也可以只沿着兰色的棱运动到另一顶点。

462．证明：对于任意的自然数n，不等式

$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n+(2n-1)^n$$

成立。

第二十二届（1988年）

年级	第一天				第二天			
8	463	464	465	466	475	476	477	478
9	467	468	469	470	479	480	481	482
10	471	472	473	474	483	484	485	486

463．一本故事书中共载有30个故事，它们的篇幅分别为1，2，…，30面．自书的第1面起就刊载故事，后续的每一个故事都另起一面．最多可能有多少个故事是从奇数编号的面起头的？

464．设$ABCD$为凸四边形．我们来考察两个新的凸四边形F_1和F_2，它们各有一对相对顶点都是$ABCD$的对角线的中点，它们的另外一对相对顶点分别是平行四边形$ABCD$的一组对边的中点。现知四边形F_1与F_2的面积相等．证明，四边形$ABCD$的一条对角线平分其面积．

465．证明：方程

$$x-y+z=1$$

具有无穷多组满足如下条件的正整数解：其中x，y，z两两不同，而且它们中任何两个数的乘积都可被第3个数整除．

466．在第一行中写有19个不超过88的自然数，在第二行中写有88个不超过19的自然数．我们将一行中的一个或数个相连的

数称为一段，证明，可以从上述两行数中各选出一段来，使得这两段中数的和相等。

467. 求方程的整数解：

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}$$

468. 设α，β，γ是任意一个三角形的三个内角，证明

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\leqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$$

469. 学校每天安排1名9（1）班学生和1名9（2）班学生同时值日，但每天仅更换其中的1名学生。各班学生都按自己班内所排好的顺序表依次参加值日，且当每人都轮过一遍以后，又从表中的第1人轮起。现知9（1）班有29名学生、9（2）班有32名学生。试问：能否编排成这样的值日表，使在某一段时间之中，9（1）班的每1名学生都恰好与9（2）班的每一名学生同时值日一天，而后又恰好轮到第1对一同值日的学生值日？

470. $\triangle ABC$的角C为钝角，在BC边上取定一点D（D不与B和C重合）。设$\triangle ABC$的外接圆为S，又点M是BC边上的一个不与D点重合的内点，作直线AM，设其与圆周S相交于点N。过点M，D和N作一圆周，设其同S除了点N外还有一个交点P，现欲使线段MP的长度达到最小，试确定点M的位置。

471. 在锐角三角形ABC中引高BD和CE，并由顶点B和C分别向直线ED引垂线BF和CG。证明：$EF=DG$。

472. 设x，y，z为正数，且$x^2+y^2+z^2=1$，试求如下表达式的最小值：

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

473. 今有一条折线，它的所有顶点全都位于某个棱长为2的正方体的表面上，它的每一边的长度都是3，它的两个端点刚好是该正方体的两个距离最远的顶点．试问，该折线最少有多少条边？

474. 设n，m，k都是自然数，且$m \geqslant n$．证明，如果

$$1+2+\cdots+n=mk,$$

则可将数1，2，…，n分成k组，使每一组数的和都等于m．

475. 证明．内接于定圆的所有腰长为a的等腰梯形的高与中位线的长度之比为定值，

476. 黑板上写着数1和2，现允许按如下规则写出新的数：如果黑板上已经写有数a和b，则可写上数$ab+a+b$．试问能否按这样的法则得到数：

1）13121；　　　　2）12131？

477. 设有理数x，y满足方程

$$x^5+y^5=2x^2y^2.$$

证明，$1-xy$是有理数的平方．

478. 某国共有21个城市，由若干个航空公司担负它们之间的空运业务，每一个航空公司都在5个城市的任意两个之间设有直达航线（无需着落，且在两个城市之间可以有数个航空公司的航线）．而每两个城市之间都至少有一条直达航线．试问，至少应有多少个航空公司？

479. 设数列的通项公式为

$$a_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n,$$

证明，该数列中有无限多项为奇合数．

480. 设$\triangle ABC$为锐角三角形，作出其外接圆，并过A，B，C三点分别作外接圆的切线．现知过A点和过C点的切线分别与过B点的切线相交于M点和N点．再作出$\triangle ABC$中的高BP（P点位于AC边上）．证明，直线BP是$\angle MPN$的平分线．

481. 设a与d为非负数，b与c为正数，且有$b+c\geqslant a+d$. 试求下式的最小值：

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}.$$

482. 在一个$n\times n$的方格表的每一格中都填有1个实数，且每一行、每一列数的和都等于0.现允许在表中进行如下的运算：任取一行数，将其逐个加到某一列数上去（即该行的第一个数加到该列的第一个数上去，将第二个数加到第二个数上去，如此等等；对行中的数自左至右编号，对列中的数自上至下编号），并且从另一列数中逐个减去该行数. 证明，可以经过有限次的这种运算，将表中的所有数都变为0.

483. 今有一条非封闭的折线内接于一条抛物线，折线共由有限条边组成，它的起点位于抛物线的顶点，它的任何相邻的两边（折线上具有公共顶点的边称为相邻的边）都同抛物线的过它们的公共顶点的切线交成相等的角. 证明，这样的折线必位于抛物线的对称轴的一侧.

484. 试问，当n至少为多大时，如下的方程组有解：

$$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=0,$$
$$\sin x_1+2\sin x_2+\cdots+n\sin x_n=100?$$

485. 数列$\{a_n\}$由如下关系式所定义.

$$a_0=0,\ a_n=p(a_{n-1})\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

其中$p(x)$为正整数系数的多项式. 证明，对于任何两个具有最大公约数d的自然数m和k，数a_m和a_k的最大公约数都是a_d.

486. 证明，对任何四面体都有如下不等式成立：

$$r<\frac{ab}{2(a+b)}.$$

其中a和b是四面体的一组异面棱的长度，r是其内切球的半径.

第二十三届（1989年）

年级	第一天				第二天			
8	487	488	489	490	499	500	501	502
9	491	492	493	494	503	504	505	506
10	495	496	497	498	507	508	509	510

487．星期天7个男孩去售货亭买冰淇淋，每个人都去过3次．已知其中每两个人都在售货亭旁边相遇过．证明：在某一时刻有3个男孩在那里同时相遇．

488．有77个大小为$3\times3\times1$的长方块．问：能否把这些长方块码到一个大小为$7\times9\times11$的带盖的长方形盒子中？

489．设M是三角形ABC的内切圆与AB边的切点．T是BC边上异于顶点的任意点．证明：三角形BMT、MTA、ATC的3个内切圆与同一条直线相切．

490．自然数N恰好有12个因数（包括1和N），把这些因数按递增的顺序编号：$d_1<d_2<\cdots<d_{12}$．已知下标为d_4-1的因数等于$(d_1+d_2+d_4)\cdot d_8$．求自然数N．

491．有2000个硬币，其中两个是假的：一个比真的轻，一个比真的重．问：如何在不带砝码的天平上通过4次称量来确定：两个假硬币的重量之和与两个真硬币的重量之和谁重谁轻、或者它们相等？

492．证明：如果a，b，c为三角形的边长且$a+b+c=1$，则有$a^2+b^2+c^2+4abc<1/2$．

493．在凸四边形$ABCD$的边AB、CD上分别取点K、M．设L是线段AM与KD的交点，N是KC与BM的交点．

1）证明：如果K和M是AB，CD的中点，那么S_{KLMN}

$<\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

2）证明：如果$AK:KB=CM:MD=m:n$，那么

$$S_{KLMN}<\frac{mn}{m^2+mn+n^2}S_{ABCD}.$$

494．用大小为1×1，2×2，3×3的正方形组成一个23×23的正方形．问：最少需用多少个1×1的正方形？

495．当自然数n最小取何值时方程$\left[\frac{10^n}{x}\right]=1989$有整数解？

496．在三角形ABC的边AB、BC、CA上分别取点D、E、F，使$DE=BE$、$FE=CE$．证明：三角形ADF的外接圆的圆心在角DEF的角平分线上．

497．在两个相交的球面上分别取两点A、B和C、D．线段AC过球面的公共点，线段BD过球面的另外的公共点并且平行于过两球面中心的连线．证明：线段AB、CD对直线AC的投影相等．

498．两个游客位于山脉两侧的、具有同一海拔高度的两点A、B处．连结A、B两点的山路是折线的形状，它的每个顶点都高于A、B两点．问：两个游客能否做到在任何时刻都在同一海拔高度上走过连结A、B两点的山路？

499．在国际象棋盘上放着8个棋子：每一条水平线和垂直线上各有1个棋子．证明：在国际象棋盘的所有黑格中共有偶数个棋子．

500．在三角形ABC的AB、BC、CA三条边上用绿色相应地标出异于三角形顶点的点C_1、A_1和B_1．已知：

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}\quad 且\angle BAC=\angle B_1A_1C_1.$$

证明：具有绿色顶点的三角形相似于三角形ABC．

501．在某片树林中有$n\geqslant3$个椋鸟巢，而且它们之间的距离不相等．在每一个巢中各有一只椋鸟．在某一时刻某些椋鸟离开

自己的巢而飞落到其它的巢中．如果某一对椋鸟之间的距离小于另外一对椋鸟之间的距离（一只椋鸟可以与其它任何一只椋鸟结成“一对”），那么在飞落之后，第一对椋鸟之间的距离就大于第二对椋鸟之间的距离．问：当n取何值时能够做到这一点？

502．证明：可以把由1、2、3、4、5五个数字组成的所有五位数（在每个数中1、2、3、4、5各出现一次）分成平方和相等的两组数．

503．是否存在实数a、b，满足：

1）$a+b$为有理数，而对于每一个自然数$n\geqslant2$，a^n+b^n是无理数？

2）$a+b$是无理数，而对于每一个自然数$n\geqslant2$，a^n+b^n是有理数？

504．在1米×1米的正方形天花板上有蜘蛛和苍蝇．在1秒钟内蜘蛛可以跳到连结它与天花板4个顶点的4条线段中任一条的中点．苍蝇在原处未动．证明：在8秒钟内蜘蛛与苍蝇的距离小于1厘米．

505．$ABCD$是等腰梯形．把三角形ABC绕点C旋转某一角度得到三角形$A'B'C$．证明：线段$A'D$、BC和$B'C$的中点在同一条直线上．

506．给定一张无穷大的格纸，它的每个格子边长为1．证明：对于任意自然数n，存在一个多边形（不一定是凸多边形），它的边都在格线上，可以恰好用n种不同的方法把这个多边形分成若干个2×1的矩形．

507．已知x、y、z为正数且满足等式$xyz(x+y+z)=1$，求表达式$(x+y)(y+z)$的最小值．

508．给定一个有偶数条棱的多面体．证明：可以在它的每条棱上标上箭头，使有偶数个箭头指向这个多面体的每个顶点．

509．是否存在函数$f(n)$，它把自然数的集合变为自身，且对于每一个自然数$n>1$，它满足$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$？

510．给定一凸多边形．把这个多边形的顶点与它的边界上某一点连结起来的、且等分多边形面积的任何线段的长度都不超过1．证明多边形的面积小于$\pi/4$．

解答与提示部分

全俄数学奥林匹克竞赛

第　一　届

1．**解法1**：假设我们能作出满足条件的折线．因为在图19中用斜线标出的1、2、3三个区域的每条边界都包含五条线段，而且折线应该与这些线段中的每一条正好相交一次．因此，这三个区域中的每一个区域应该包含折线的一个端点（如果存在一个区域，在它内部不包含任何一个端点，那么折线进入这个区域的次数应该等于它离开这个区域的次数，即它和区域边界相交的次数应该是偶数），可是折线的端点只有两个。所得的矛盾证明了此题的结论．

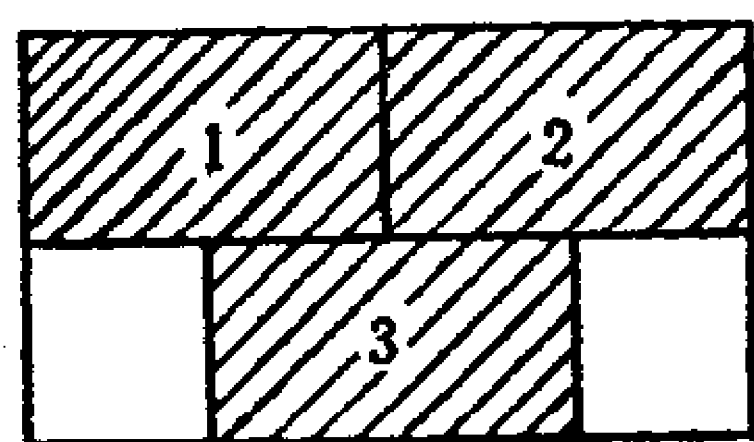


图19

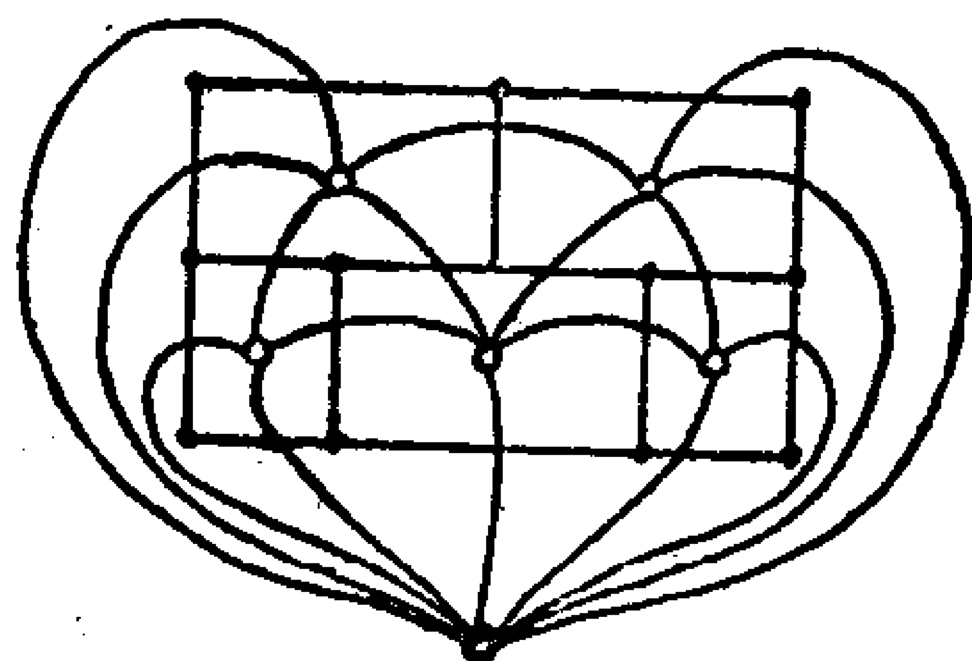


图20

解法2．我们的图形共有16条线段，把平面分成6个区域．在每一个区域中标上一个点作为区域的"首都"，且对每条线段画出与它相交的、连接两个区域"首都"的路(图20)．沿着每条路走一次，不可能走遍所得的路网，因为有4个首都是奇数条路的会合地．而为能走遍所得的路网，必须使那些有奇数条路的首都的

个数为0或2.

2. 设$ABCD$是已知的矩形，LN是圆周1、3的公切线. 从矩形的中心O作直线LN的垂线OM，那么四边形$ALNC$是梯形，而OM是它的中位线，所以$OM=(r_1+r_3)/2$. 由点O到这两个圆周的第二条公切线的距离也等于$(r_1+r_3)/2$.

同样可断定，由点O到其余两个圆周的公切线的距离等于$(r_2+r_4)/2$. 根据条件$r_1+r_3=r_2+r_4$，点O与4条切线等距，即点O是由4条切线构成的四边形的内切圆的中心.

3. 在已知数的前20个数中存在两个数，它们在十进制记数法中的末位数等于0.

假设这两个数之一在末位数0之前是不等于9的数字，设这个数于N，S为N的数字之和，那么$N, N+1, \cdots, N+9, N+10$含于已知的39个数之中，且对应的数字和分别为$S, S+1, S+2, \cdots, S+10$. 然而在11个相邻数之中就有一个能被11整除.

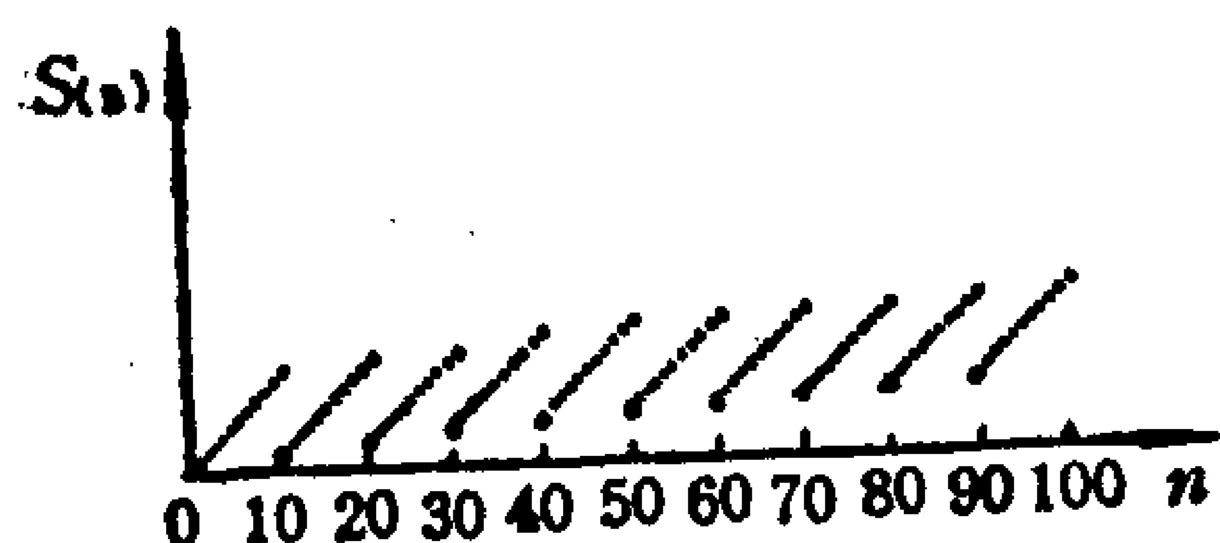


图21

注　一般地说，对于每一个$m=2, 3, \cdots$，可以找到最小的C_m，使在任何C_m个连续自然数中，能有一个其数字和被m整除的数（对于$m<20$，只要研究函数“数n的数字和”在一百个点上的性质即可，这个函数的图象表示在图21中）.

特别，$C_2=3, C_3=5, \cdots, C_{10}=19, C_{11}=39, C_{12}=59, \cdots$

4. 显然，图22中表示的7个小星星的位置满足此题的要求.

			*
*	*		
*		*	
	*	*	

图22

如果是六个小星星或者更少些，则存在两列，在每一列中不多于一个小星星. 我们划去剩下的两列，剩下的小星星不多于两个，它们可以与所在行一起

被划去。

注　研究类似的一般问题是很有意思的：最少多少个小星星分放在$m\times n$表格中，才能使在划去k行和l列之后至少剩下一个小星星（这里k,l，m,n为自然数，$k<m$，$l<n$）。然而，当$m=n$，$k=l=n-2$时这个问题是很难的（参考第208题，其中$n=7$，及$n=13$）。

5．1）假设四个正数（a，b，c，b）再次出现。

首先证明：在这种情形中，$abcd=1$。

设$abcd=p$，那么第二组的四个正数的乘积等于p^2，第三组的则是p^4，第四组的是p^8，…。显然，当$p\neq1$时在乘积序列中将不会有两个数相同，因此所得的四数组将不相同，于是$p=1$。

现在我们考察第二组的四个正数：ab、bc、cd、da。因为$abcd=1$，那么容易验证，第四个四数组是b^2c^2、c^2d^2、d^2a^2、a^2b^2。于是第四组是由第二组的每个数的平方再重排得到的。同样也能由第四组得到第六组，由第六组得到第八组，等等。

如果第二组中的四个数不都等于1，那么其中最大者大于1。于是第$2n$组中最大者将随着n的增大而无限地增大，而这与它们循环重复相矛盾。

于是$ab=bc=cd=da=1$。由此容易得到$a=b=c=d=1$。

2）当$n=1$时，结论显然成立。

假设$n=k$时结论成立，我们来证$n=k+1$时结论也成立。

我们把前三行写在下面

$$x_1,\ x_2,\ x_3、x_4,\ \cdots,\ x_{2^{k+1}},$$

$$x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_4,\ \cdots,\ x_{2^{k+1}}x_1,$$

$$x_1x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_5,\ \cdots,\ x_{2^{k+1}}x_2,$$

容易看到，在号码为奇数的位置上的数与号码为偶数的位置上的数构成两行：x_1、x_3、…、$x_{2^{k+1}-1}$，与x_2、x_4…、$x_{2^{k+1}}$，它们是“隔步”得到的，这就是条件所要求的，因

为按归纳假设步长为2^k的行总能变成全由1构成的行，因而由步长为2^{k+1}的初始行也能得到全由1构成的行．

注　可以证明，步长为$m=2^k r$（r为奇数）的行x，当且仅当它是由r个步长为2^k的相同块组成(即有周期2^k)时，才能得到全由1组成的行

6．1）设$\overrightarrow{O_1O_3}$是由$\overrightarrow{O_1O_2}$旋转60°得到的向量（朝使$\overrightarrow{AB}$变为$\overrightarrow{AC}$的方向旋转），点A'和B'为A和B绕着O_1旋转的像，在向量$\overrightarrow{O_1A}$匀速旋转时，向量$\overrightarrow{O_2B}$将以同样的角速度旋转．$\triangle O_1A'A$绕着O_1旋转，向量$\overrightarrow{O_3B'}$与$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{A'A}$（就是说它们的和$\overrightarrow{O_3C}$）绕着$O_3$旋转（图23）．

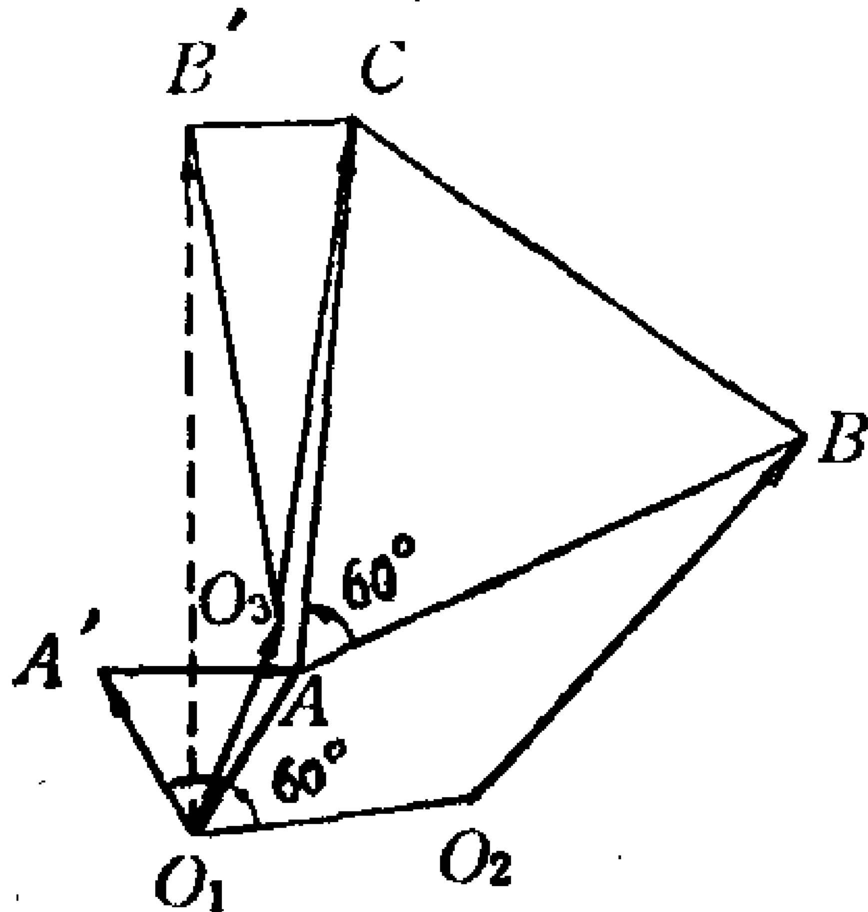


图23

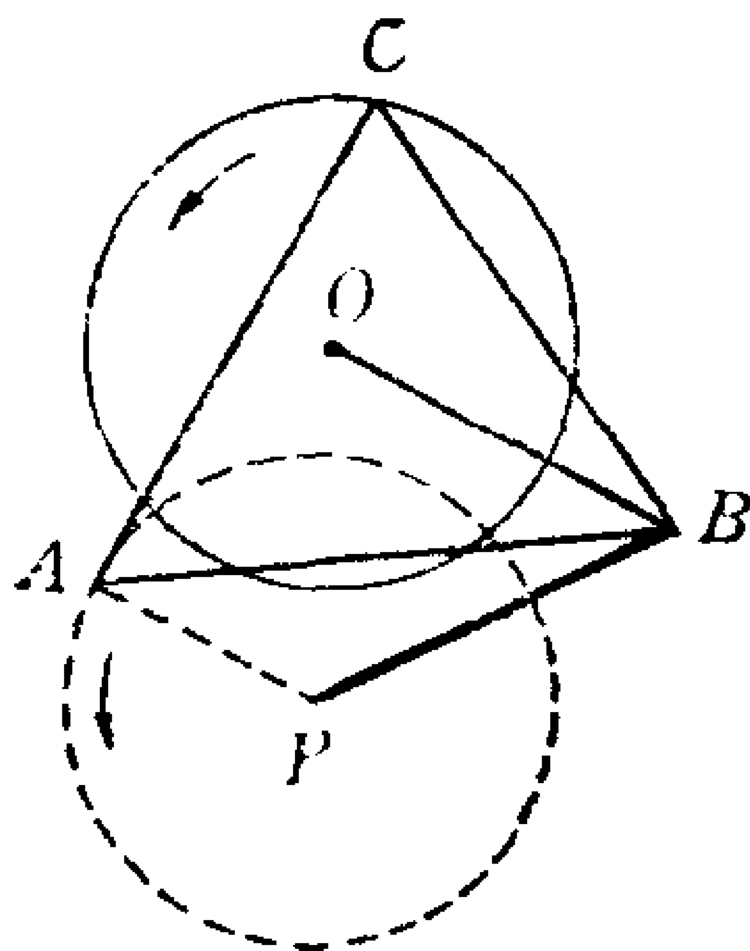


图24

2）答案：5．把点B固定在与点P的距离为3的地方（图24）．当点A沿半径为2、中心为P的圆周转动时，顶点C将沿着半径为2、中心为O的圆周运动，点O到点P的距离$OP=3$（$\triangle OPB$是等边三角形）．这个圆周最远点到点P的距离等于$CO+OP=5$．

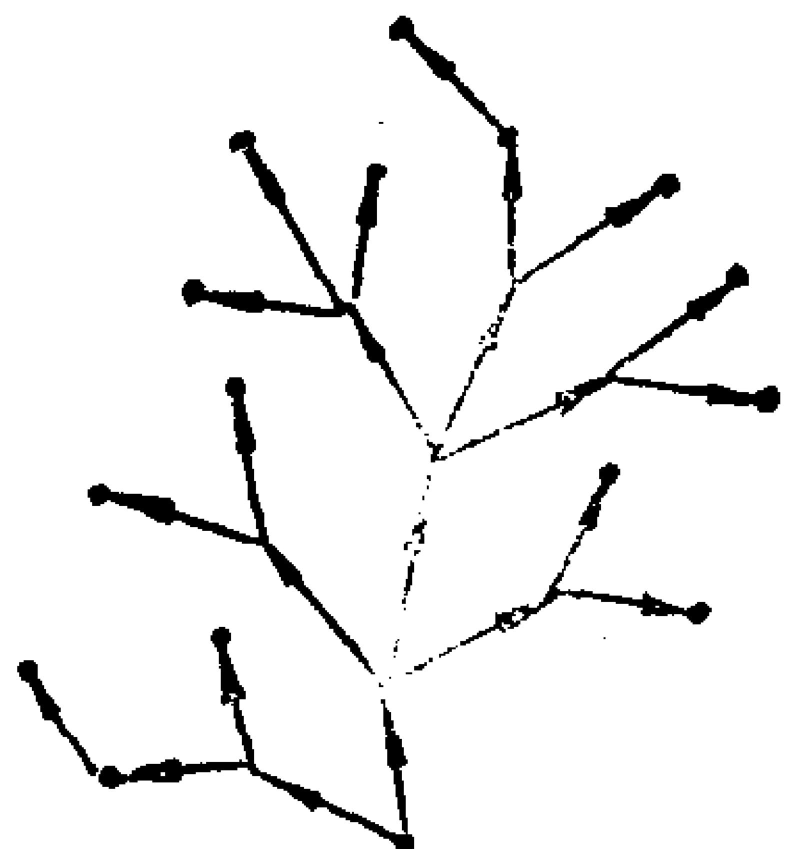
注　对于任何等边三角形ABC和任何点P，类似的不等式$PC\leqslant AP+BP$中的等号对三角形ABC的外接圆的弧AB上的所有点都成立（点C除外）．

7．在由已知表格通过改变行和列的符号所能得到的一切表格中，我们取和Σ最大的那一个．这样的表格T是存在的，因为

在$m\times n$的表格中数前的符号排列共有2^{mn}种方法（能用来实现行和列中符号改变的方法要少些：2^{m+n-1}种）。在表格T的每一行及每一列中所有数之和是非负的。事实上，如果表格T中的某一行（或某一列）中一切数之和是负数，那么改变这一行（列）的符号后，我们就得到一个这样的表格，它的一切数之和比T的Σ更大，这与表格T的取法矛盾。

8．我们把n个点中的一个点称为"根"，将其余的每个顶点与从"根"通往这个点的路径的最后一条线段对应起来。这个在$n-1$个顶点的集合与一切线段的集合之间的对应是双方单值的。

为了很清楚地表示这一点，只要在从"根"出发的每一条线段上标上箭头（图25），则除了根之外，只有一个箭头指向每一个点。


图25

注　这个问题所研究的图形称为树（索11），我们在其中标出一个点后就把树变成了定向树。也可以用数学归纳法解这个问题。

9．设数b和$p-a$的最大公约数等于d，$b=kd$且$p-a=ld$，那么数k和l互质。此外，$ak+bl=ab/d+(p-a)b/d=pk$，于是$ak+bl$能被p整除。

10．答案：对科里亚最有利的方法是第一种。当进行正确游戏时，他用第二种和第三种方法得到的核桃要少些（一般地，正如我们要看到的，这个分法中的争执是由于一个核桃引起的）。

在别佳的第一步之后，无论有什么样的核桃堆（各有a和b个核桃，$a<b$），科里亚总能把其中的大堆分为两部分，各为1个和$b-1$个核桃，它们也是最大的一份和最小的一份，即在第一种分法中得到$b\geqslant n+1$个核桃（取$a=n$，$b=n+1$后，别佳妨碍他

得到多的）．在第二种方法中，在第一步取$a=2$，$b=2n-1$后，最好的结果是分成$2=1+1$，$2n-1=n-1+n$，科里亚只得到n个核桃（然而当第一步采用其它分法时，他至少可以得到$n+1$个）．在第三种方法中，别佳的分法是$a=n$，$b=n+1$，这种分法不允许科里亚得到多于$n+1$个核桃（两个中等堆的个数之和以及最大堆、最小堆的个数之和始终正好是n及$n+1$），所以应该交出的一个核桃是有决定意义的．

11．因为数a_1，a_2，…，a_n，…是自然数，那么存在下标数列i_1，i_2，…i_n，…使$a_{i1}\leqslant a_{i2}\leqslant\cdots\leqslant a_{in}\leqslant\cdots$（$a_{i1}$为数列$a_n$中最小数，$a_{i2}$为其余数中的最小数，等等）．类似地，从下标数列$i_1$，$i_2$，…，$i_n$，…中可以挑选子数列$j_1$，$j_2$，…，$j_n$，…，使

$$b_{j_1}\leqslant b_{j_2}\leqslant\cdots\leqslant b_{j_n}\leqslant\cdots$$

显然，数列a_{j1}，a_{j2}，…，a_{jn}，…仍然是不减的．现在剩下的是从数列c_{j_1}，c_{j_2}，…，c_{j_n}，…中挑选不减数列c_{k_1}，c_{k_2}，…，c_{k_n}，…，那么有

$$a_{k_1}\leqslant a_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant a_{k_n}\leqslant\cdots,$$
$$b_{k_1}\leqslant b_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant b_{k_n}\leqslant\cdots,$$
$$c_{k_1}\leqslant c_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant c_{k_n}\leqslant\cdots$$

由此得到结论．

注　在解题时我们利用了在自然数的任何（甚至无穷）集合里有最小数，这个事实看起来是显然的，它等价于数学归纳原理．

12．半径为1且完全在矩形内部的圆的圆心与矩形的任何一边的距离应该大于$\frac{1}{2}$，即在图26—1中所表示的框子内部．

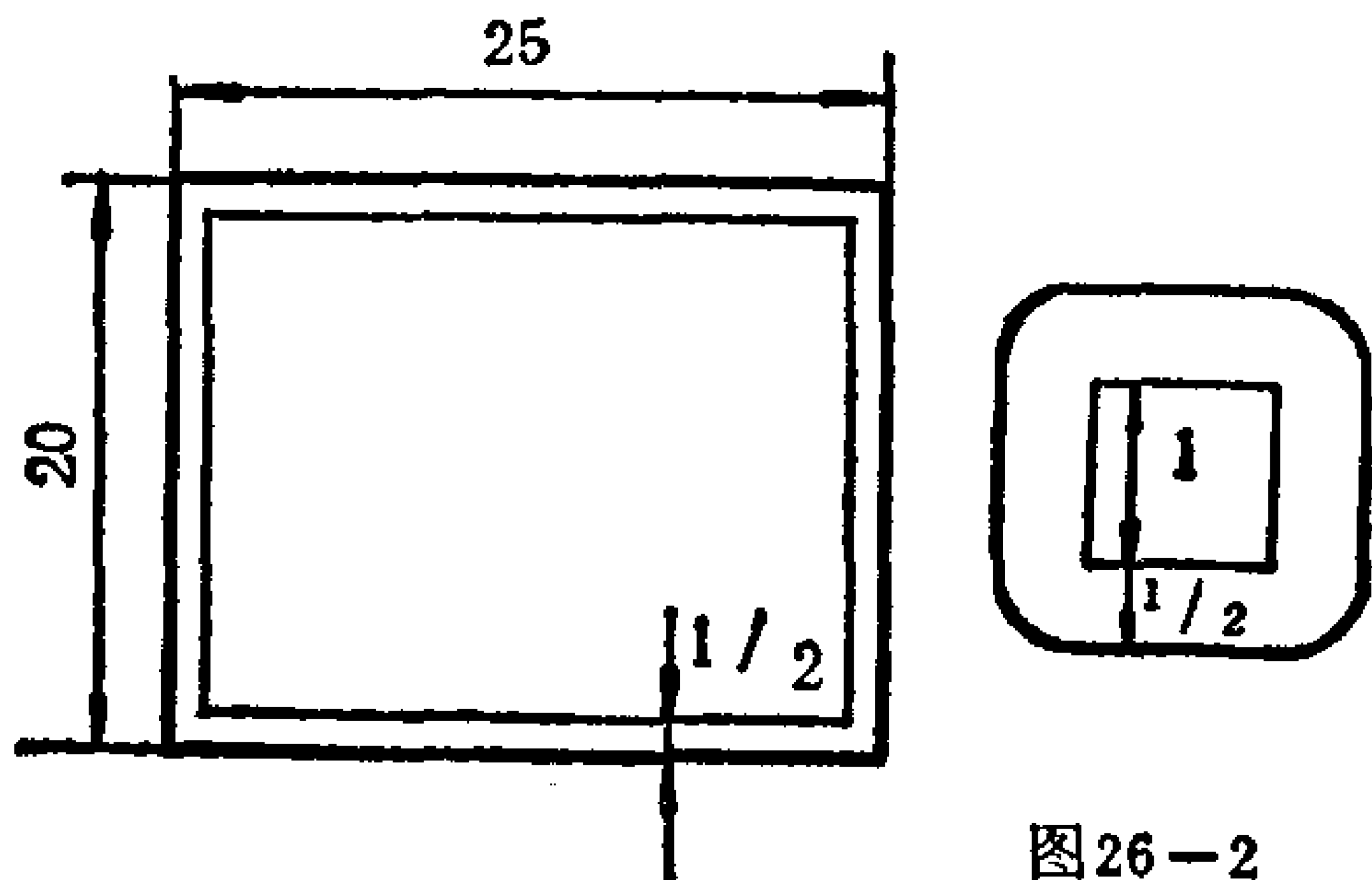


图26—1　　图26—2

图26—1里面那个矩形的面积等于19×24＝456.此外，圆的中心与任何正方形的边界的距离大于$\frac{1}{2}$，即在图26—2中所表示的面积为$3+\pi/4$的每个小图形的外部.而且如果这些小图形不相交且不碰到框子，它们的总面积等于$120\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=360+30\pi$ $<306+30\times3.2=456$.

于是，用这些小图形不可能覆盖面积为456的矩形，所以存在与任何正方形都不相交的直径等于1的圆.

第 二 届

13. 中线等分三角形的面积，因此（图27）

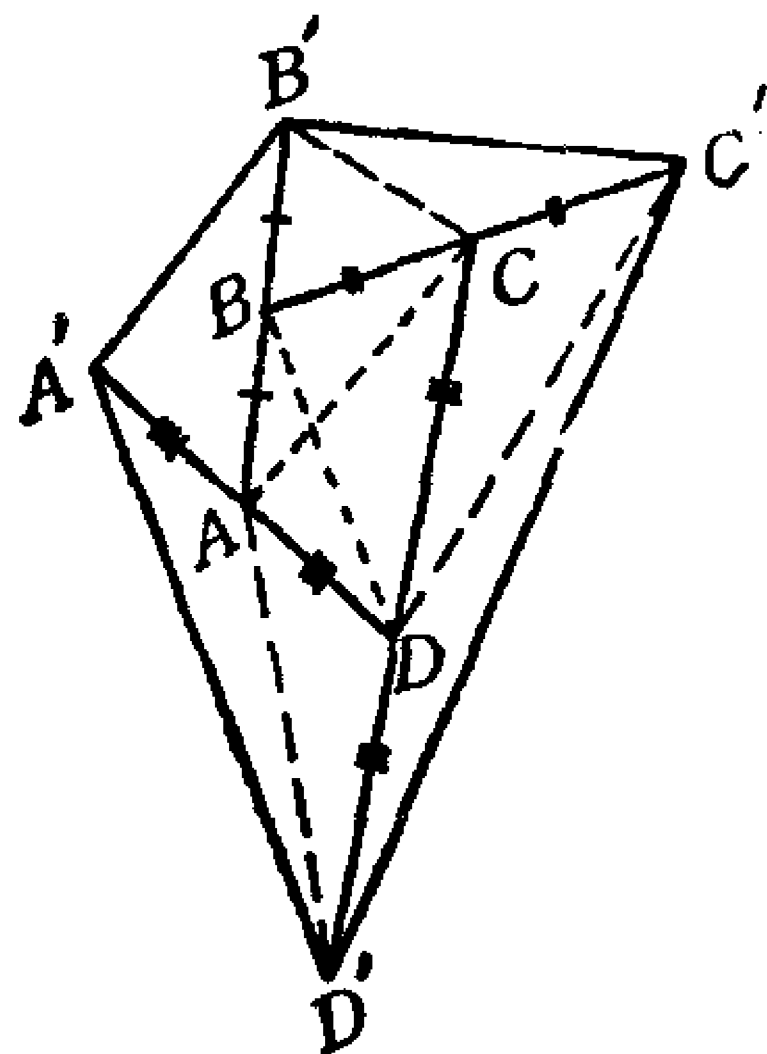


图27

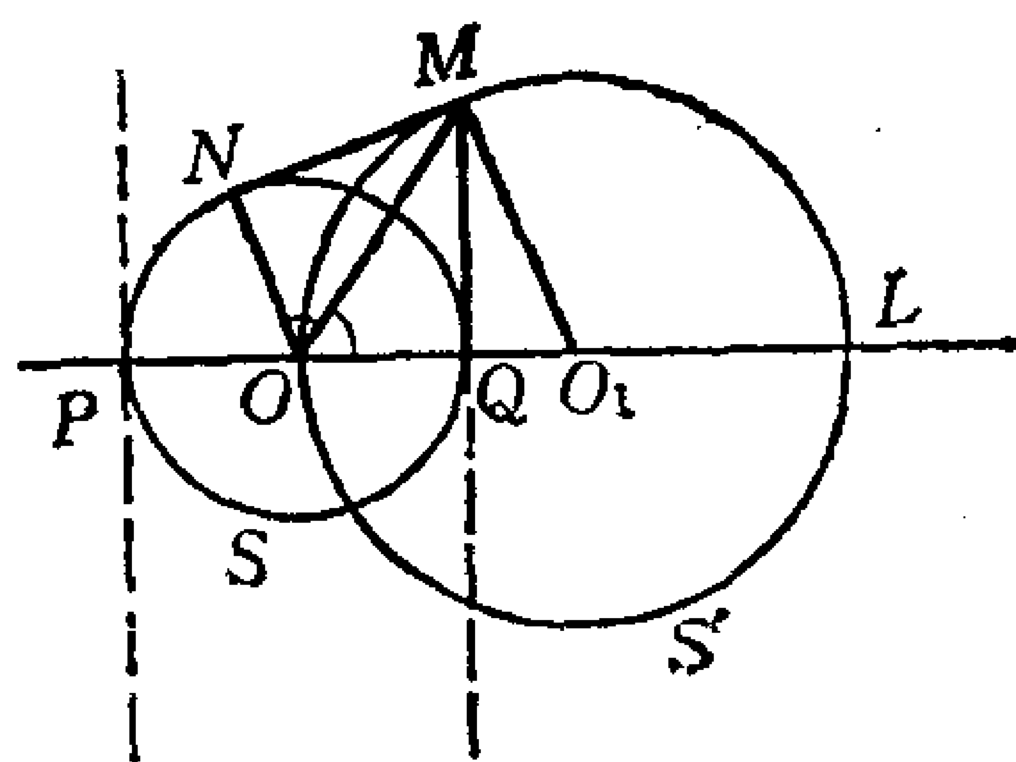


图28

$$S_{ABC}=S_{CBB'}=S_{CB'C'}.$$

由此得到 $S_{BB'C'}=2S_{ABC}$.

同样也可证得 $S_{CC'D'}=2S_{BCD}$;

$$S_{DD'A'}=2S_{CDA};\ S_{AA'B'}=2S_{DAB}.$$

把这四个等式相加，我们得到

$$S_{BB'C'}+S_{CC'D'}+S_{DD'A'}+S_{AA'B'}$$

$= 2\ (S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB})$

$= 4S.$

因此$S_{A'B'C'D'}=4S+S=5S.$

14．答案：所求的切点M的集合是两条直线（除去P、Q）它们与圆周S相切于点P、Q（P、Q为圆周S和直线l的交点）．

假设S和S′的公切线与圆周S在点N相切，那么$\angle NOM=$ $=\angle OMO_1=\angle MOO_1$（$ON\parallel O_1M$且$OO_1=O_1M$）．因此$\triangle ONM\cong\triangle OMQ$，$\angle NMO=\angle OMQ$，于是$\angle MQO$为直角，且直线$MQ$与$S$相切于$Q$（图28）．

另一方面，过前面所指出的两条直线上且不在S上的任何一点可以作一圆周，它经过点O，且中心在直线l上．

15．由已知条件$a_1-a_0\geqslant 1$．此外，$a_2-a_1=2(a_1-a_0)$，$a_3-a_2=2(a_2-a_1)$，…，$a_{100}-a_{99}=2(a_{99}-a_{98})$．把这99个两边都为正的等式连乘起来，在乘积两边约去公因子a_2-a_1、a_3-a_2、…、$a_{99}-a_{98}$后，我们得到

$$a_{100}=a_{99}+2^{99}(a_1-a_0)\geqslant 2^{99}.$$

注　由数学归纳法$a_k\geqslant 2^k$，$a_{k+1}-a_k\geqslant 2^k$（$k=1, 2, \cdots$）可得出更精确的估计：$a_{100}\geqslant 2^{100}$．

16．设$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，若

$$P(62)-P(19)=a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+$$

$c(62-19)$能被43整除，但不能等于1．

注　一般地说，对于任何整系数的多项式$P(x)$来说，$P(x_1)-P(x_2)$能被x_1-x_2整除，其中x_1，x_2是不同的整数．

17．设p_1，p_2，…，p_n为每一行的乘积，q_1，q_2，…，q_n为每一列的乘积，那么$p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_n$——我们用两种方法来计算表格中所有数的乘积．就是说，在p_1，p_2，…，p_n中以及在q_1，q_2，…，q_n中-1的个数的奇偶性相同，即在$2n$个数p_1，p_2，…p_n，q_1，q_2，…，q_n中总有偶数个-1，同样也有偶数个

$+1$。然而它们的个数不同（因为n为奇数），因此$p_1+p_2+\cdots+p_n+q_1+q_2+\cdots+q_n\neq 0$。

注　这个和可能与$2n$只相差数d（d为4的倍数）。有意思的是，建立相应的例子来解释是否对于任何$d=4k$，$|k|<n/2$，上述和可能等于$2n-d$。

18．假设我们已知三角形的边BC、AC的长度为a、b，且我们想让它的中线AD和BE相交成直角。在长为b的线段AC上取点F，使$AF:FC=3$，那么$FD\parallel BE$且$\angle ADF$应该等于$90°$，即点D应该在直径为AF的圆周上，也在半径为$a/2$、中心在C的圆周上。由此看出可以作出点D及点B。如果$1/2\leqslant 1/a<2$，此题有解，同时所求三角形唯一。

注　可以证明，在这样的三角形中，第三条边c的平方为：$c^2=(a^2+b^2)/5$，由此得到第二种解法。

19．由不等式$x^2+y^2\geqslant 2xy$得到

$$(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\geqslant 2(ab+cd)\geqslant 4\sqrt{abcd}\geqslant 4,$$

$$ab+cd\geqslant 2,\ bc+ad\geqslant 2,\ ac+bd\geqslant 2.$$

注　若利用算术平均值和几何平均值的一般定理就可以用其它方法来解题；也可以证明，对于任意n个乘积为1的正数，它们的平方和不小于n，而它们两两乘积之和不小于$n(n-1)/2$。

20．使r_3取最大值的点M是正五边形的顶点，而使r_3取最小值的点M是正五边形各边的中点。用正五边形的对称轴把它分成10个三角形（图29），只要在一个三角形（例如$\triangle AOK$）研究它的内点或边界上的点M就可以了。

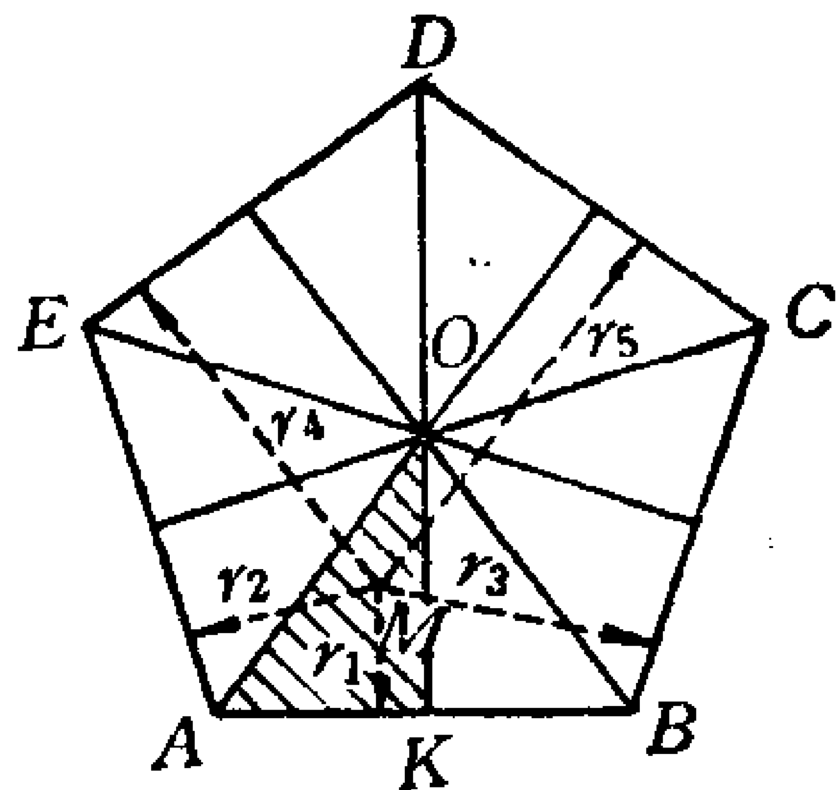


图29

为了比较从某一个角内部的点M到其它边的距离，只要搞清楚这个点在角平分线的哪一侧。利用这一点，我们能断定点M到五边形各边AB、AE、

BC、DE、CD的距离总是按增序排列：$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5$。当$M$与$A$重合时，第三个距离$r_3$将是最大的，当$M$与$K$重合时，$r_3$将是最小的。

21．答案：$c=9$．任何一个数本身以及它的数字和在除以9时有相同的余数．$\therefore c \geqslant 9$．另一方面，$a \leqslant 1962 \times 9 < 19999$，因此$b \leqslant 1+4\times 9=37$，且$c \leqslant 9$．

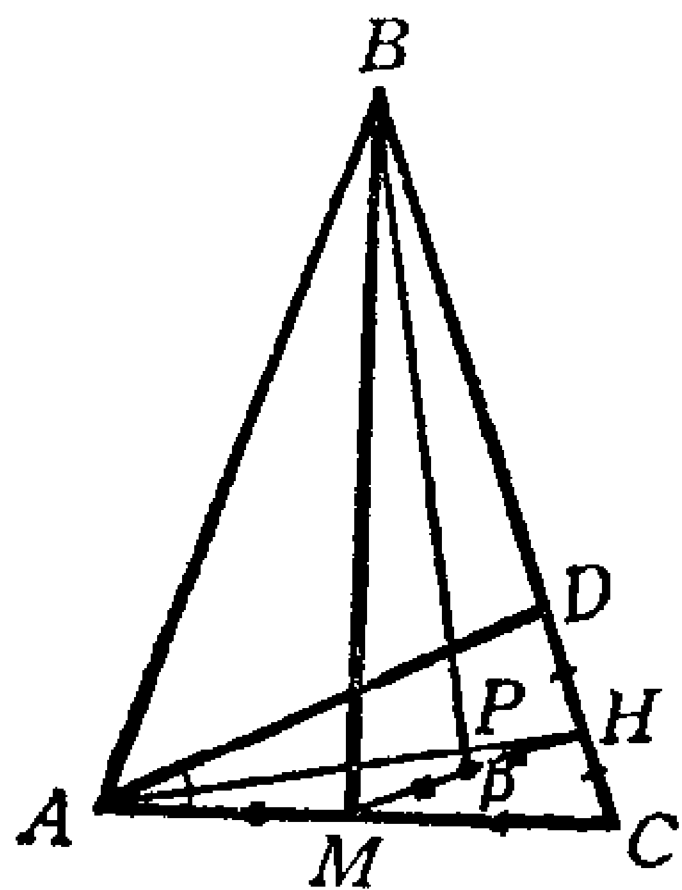


图30

22．在$\triangle ABC$中作高AD(图30)，那么在$\triangle ADC$中线段MH将是中位线，即$DH=CH$．直角三角形BHM与直角三角形ADC相似，因为$\angle DAC=90^\circ-\angle C=\angle HBM$；同时在把其中之一旋转$90^\circ$后所对应的边互相平行；同时相应的中线$BP$和$AH$也平行，即旋转前有$AH \perp BP$．

23．答案：1．在两条边为a、b（$0 \leqslant a \leqslant 1$，$1 \leqslant b \leqslant 2$）的三角形中，以$a=1$，$b=2$为直角边的直角三角形有最大面积（事实上，$S \leqslant ab/2 \leqslant 1$，因为对$b$边所作的高不大于$a$）．它的第三条边等于$\sqrt{5}$，满足条件$2 \leqslant c \leqslant 3$．所以在所研究的一切三角形中，它有最大的面积．

24．商等于$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz$．为了检验所需要的等式，设$x-y=u$，$y-z=v$，到么$z-x=-(u+v)$．利用牛顿二项式公式

$$(u+v)^5=u^5+5u^4v+10u^3v^2+10u^2v^3+5uv^4+v^5$$

来证明等式

$$(u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u+v)(u^2+uv+v^2).$$

25．图31帮助解这个题：顶点在点(k,a_k)的折线是凸的，因为$a_{k+1}-a_k \geqslant a_k-a_{k-1}$（即每一条边的角系数大于前一条边的角系数），所以除了端点之外，整个折线都在OK轴下方．

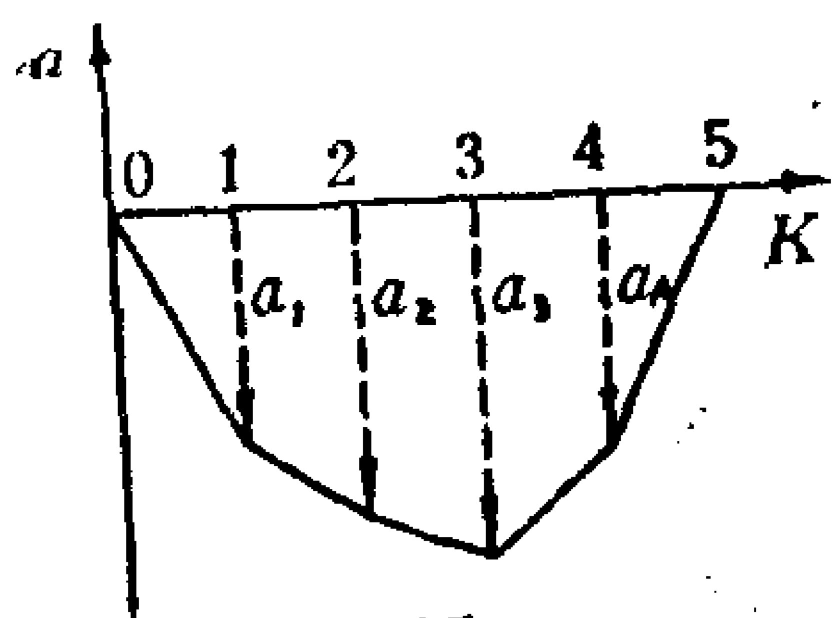


图31

我们假设，对于某个$m \geqslant 1$有$a_{m-1} \leqslant 0$，$a_m > 0$，那么$a_n - a_{n-1} \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant a_{m+1} - a_m \geqslant a_m - a_{m-1} > 0$，因此$a_n > a_{n-1} > \cdots > a_m > 0$，这与条件$a_n = 0$矛盾。

26．解法1．我们将应用数学归纳法来证明，并假设当$m+n$较小时结论成立．对于1×1的表格，结论显然成立．从$m+n$个已知数a_1，a_2，…，a_m，b_1，b_2，…，b_n中挑选最小的一个——设它为a_1．我们把a_1放到左上角，接着剪去第一行，剩下的是对$(m-1)\times n$的表格及a_2，…a_m，b_1-a_1，b_2，…b_n来解这个题，根据归纳假设，我们会做这一点了．

解法2．这是典型的"奥林匹克的"解法．我们画出长度为$d=a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$的线段，并且用两种方法把它分成$m$条长为$a_1$，$a_2$，…，$a_m$的"红"线段及$n$条长为$b_1$，$b_2$，…，$b_n$的"蓝"线段．总共是$(n-1)+(m-1)$个分点及相应的$m+n-1$条小线段．剩下是把每条小线段（某些红的$a_i$与某些蓝的$b_j$的交）的长度写到相应的格子中去（在第$i$行和第$j$列的交上）．

第　三　届

27．设第一个、第二个、第四个和第五个圆周通过点A；第一个、第三个、第四个和第五个圆周通过点B；第二个、第三个、第四个和第五个圆周通过点C．

我们看到，所有三个点A、B、C不可能是不同的，因为它们都在第四个和第五个圆周上，而两个圆周的交点不多于两个．就是说点A、B、C中的某两个重合（索9）．

例如，假设A和B重合，那么所有圆通过点A。

28．答案：第三名赢第七名．

得最后四名的棋手彼此之间比赛了6场，因此在这些比赛中大家至少得了6分．所以得第二名的棋手得分不低于6分．

另一方面，他的得分不可能高于6．如果循环赛的优胜者取得7分，则第二名就会输给他，就是说得分不高于6；如果第一名得6.5分，那么第二名也不高于6分．

由此得出，第二名正好得了6分．

循环赛的最后四名共得了6分，所以他们在与前四名的所有比赛中，都输给了前四名．

29．1）设O为四边形$ABCD$的对角线的交点．因为三角形ABD和三角形BCD的面积相同，且有公共底BD，故从点A和C所作的高相等，即点A和C与BD等距，由此得出$AO=OC$．同样也能证明$BO=OD$。

于是，四边形$ABCD$的对角线被它的交点平分，这就是说$ABCD$是平行四边形．

2）解法1．我们假设某一个凸六边形$ABCDEF$的连接相对顶点的对角线都等分其面积，且不相交于同一点．那么，它们的交点P、Q和R是在六边形内部的三角形的顶点（图32）．四边形$ABCD$和四边形$BCDE$的面积相等，因此三角形ABP和三角形EPD的面积也相等，因为

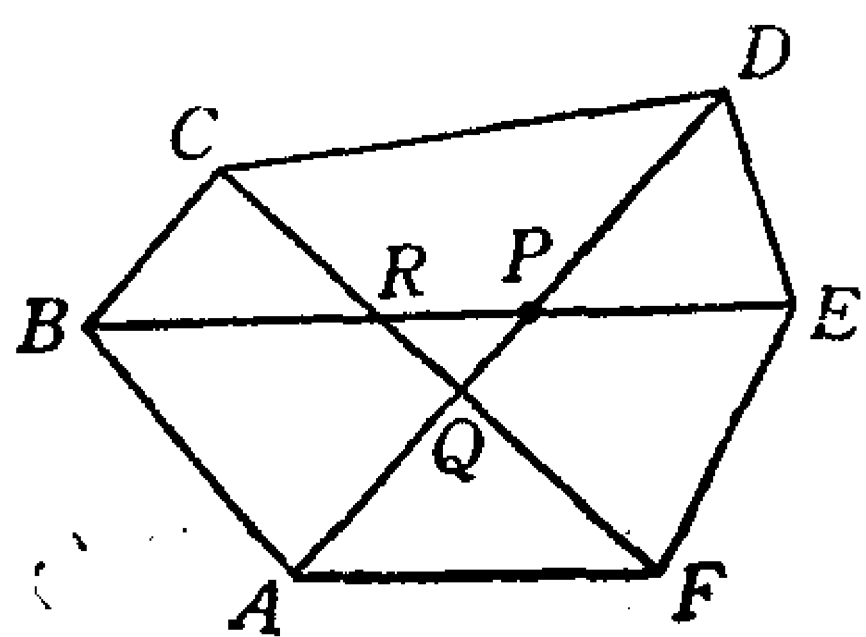


图32

$$S_{ABP}=S_{ABCD}-S_{BCDP}=S_{BCDE}-S_{BCDP}=S_{EPD}.$$

同样可得

$$S_{BCR}=S_{EFR} \quad 及 \quad S_{AQF}=S_{CQD}.$$

由三角形面积相等得到

$$AP\cdot BP=EP\cdot DP,$$
$$CQ\cdot DQ=AQ\cdot FQ,$$
$$ER\cdot FR=BR\cdot CR.$$
把这些等式连乘起来，我们得

$$AP\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot ER\cdot FR=AQ\cdot BR\cdot CR\cdot DP\cdot EP\cdot FQ$$

然而这是不可能的，要知道$AP>AQ$，$BP>BQ$，$CQ>CR$，$DQ>DP$，$ER>EP$，$FR>FQ$。因此右边的乘积小于左边的乘积．所得的矛盾证明了对角线AD、BE和CF交于一点（即$FQ=QR=RP=0$）．

解法2．这个解法是以利用几何变换（同位相似）为基础的．因为四边形$ABCD$和四边形$BCDE$的面积相等，那么三角形ABD和三角形BDE面积也相等（他们比相应的四边形的面积小S_{BCD}）．这些三角形有公共底边BD，由面积相等得到从顶点A和E向BD所作的高也相等，即点A和E与BD等距．因此$AE\parallel BD$．同样可得$CE\parallel BF$及$DF\parallel AC$．于是三角形BDF和三角形ACE相似．

设P为对角线AD和BE的交点．我们考察中心在点P且系数为$PE:PB$的同位相似，在这个同位相似的作用下，点B变为点E，而点D变为点A，直线DF变为直线AC，而BF变为EC．

因为F是DF和BF的交点，它变为直线AC和EC的交点，即变为点C．因此点F、P和C在一条直线上，这就是说，对角线AD、BE和CF相交于点P．

30．如果a^2+b^2及$a+b$也能被d整除，那么$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$也能被d整除．所以$2a^2=2a(a+b)-2ab$及$2b^2=2b(a+b)-2ab$都能被d整除．

但是如果a和b互质，那么a^2和b^2也互质，所以$2a^2$和$2b^2$不可能同时被任何$d>2$整除．

31．1）设AC为直径，角AMC为直角，因为$MK=KM$，

$PK \parallel MC$，那么直线PK与线段BC相交于中点：$BH=HC$，于是所有直线PK通过线段BC的中点H。

2）由1）得出：点P的集合在以AH为直径所作的圆周上。因为$\angle HBA$是直角，这个圆周通过点B。

32．答案：$d=2/3$。

如果线段的轨迹覆盖整个三角形，那么它在某个位置上通过三角形的中心。我们要证明：在端点位于三角形的边上且通过其中心O的一切线段中最短的一条是平行于三角形边的线段AB。

设$A'B'$为任意一条端点在三角形的边上且通过其中心的线段，同时$OB'<OA'$（图33）。

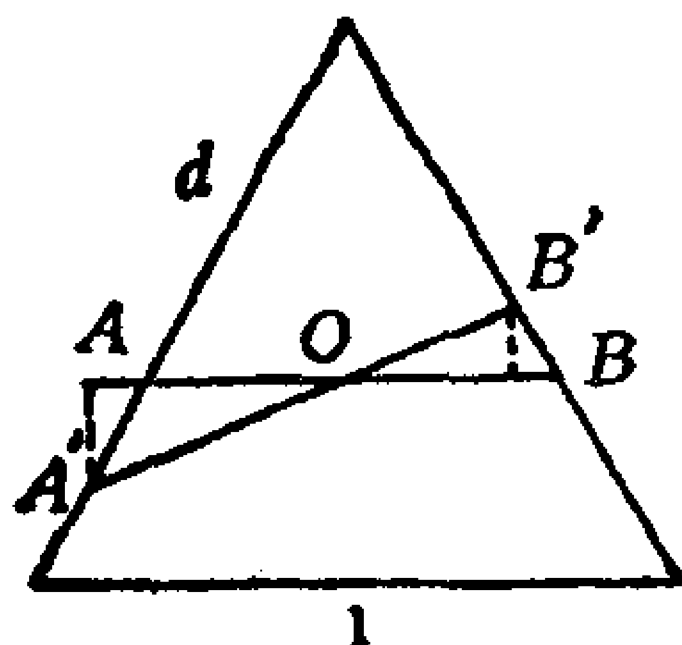
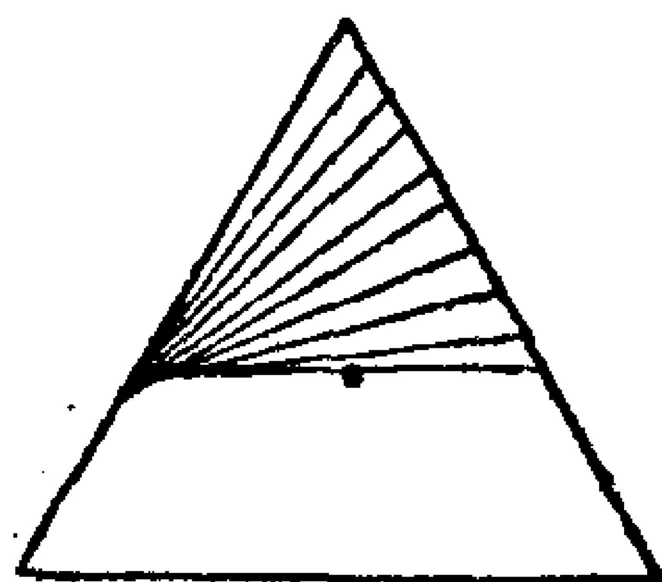


图33—1


图33—2

那么$AA'>BB'$。显然，这条线段对直线AB的射影的长度大于2/3。于是其轨迹能覆盖整个三角形的线段不可能短于2/3。

另一方面，长度为2/3的线段的轨迹能覆盖整个三角形。为此需要证实，过三角形内部的任何一点P可以作长度为2/3且端点在三角形边上的线段。我们过点P作两条直线，一条平行于离点P最近的边，一条平行于离点P最远的边。它们被三角形截得两条线段，其中第一条的长度大于2/3，第二条的长度小于2/3。我们把过点P的直线从第一个位置旋转到第二个位置，在中间的某个位置上线段的长正好等于2/3，这条线段的两端点正好在三角形的边上。

注 顺便指出，虽说最后一个结论是显然的，然而它的严格证明需要考虑连续性。

33. 我们假设，可以把多米诺骨牌放到棋盘上，使棋盘的每条水平直线和垂直直线至少与一个骨牌相交。

总共有10条那样的直线，其中每一条都把棋盘分成有偶数个格子的两部分。在任何一部分中都有若干个没有被分开的骨牌，这些骨牌占着偶数个格子，其余的格子由被分开的骨牌占着。因为格子有偶数个，因此被分开的骨牌的个数也是偶数个。

于是10条直线中的每一条至少分开2个骨牌，因每一个骨牌只由1条直线相截，因此被分开的骨牌个数不少于20。

然而放在棋盘上的骨牌总数为18。

34. 可以认为，已知数按严格递增的顺序排列着：$a_1<a_2<\cdots<a_n$。我们研究数

$$a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_{n-2},\quad a_{n-1},\quad a_n$$
$$a_1+a_n,\quad a_2+a_n,\quad \cdots,\quad a_{n-2}+a_n,\quad a_{n-1}+a_n,$$
$$a_1+a_{n-1}+a_n,\quad \cdots,\quad \cdots,\quad a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$
$$\cdots\qquad \cdots\quad \cdots$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

显然，这里每一个数都大于它前面的一个数。于是，所写的数都不相同，它们的个数为$n+(n-1)+\cdots+1=n(n+1)/2$，符合此题的要求。

我们也指出，由前n个自然数不可能组成多于$n(n+1)/2$个不相等的和（这些和都是从1到$1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$的自然数）。

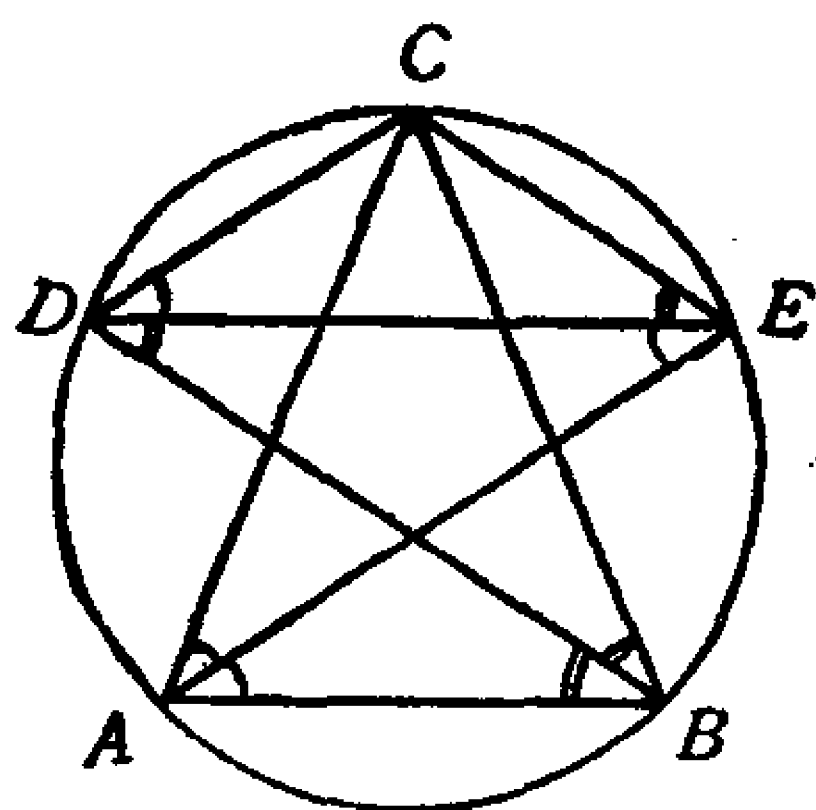


图34

35. 由角的相等（图34）关系得出点A在经过点C、D和E的圆周上，点B也在这个圆上，同时$DE\parallel AB$。

36. 设级数的公差等于d，且设其中一项$a=m^2$，这里m为自然数。那么当k为自然数时，数$(m+kd)^2=m^2+2mkd+k^2d^2$

$=a+d(2km+k^2d)$也是级数的一项。这就意味着级数有无穷项是自然数的平方。

37. 答案：不能。数字a与其它9个数字中的每一个能构成9对数字。为了对于这些"数字对"找到用相应数字标号的45边形的边，必须至少把a放在它的5个顶点上，因为总共10个数字，因此为了摆好它们必须要50个顶点。

因此题目条件中所要求数字的摆法不可能实现。

38. 答案：$a_{1,2}=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1/2}$，$b_{1,2}=\mp\sqrt[20]{2^{20}-1/2}$，$p=-1$，$q=1/4$（共两组系数）。

设$x=1/2$，得

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}+\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{2}+q\right)^{10}=0$$

由此得到$a=-2b$。现在等式变为

$$(2x-1)^{20}=(-2bx+b)^{20}+(x^2+px+q)^{10}$$

在两边计算x^{20}的系数，得

$$2^{20}=2^{20}b^{20}+1;\quad b=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1/2},$$

此时等式有形式

$$(x-1/2)^{20}=(x^2+px+q)^{10},$$

由此得　$x^2+px+q=(x-1/2)^2$，即$p=-1$，$q=1/4$。

39. 答案：2×3^n。在第一步之后所有数之和等于$6=2\times3$。

设S_n为n步之后所有数之和，不难证明在$n+1$步之后所有数的和将等于$2S_n+S_n=3S_n$。

于是，数字和每一步都是前一步的3倍，因此第n步时，和等于2×3^n。

40. 答案：所求的集合是与三角形两腰相切于底边两端点的圆弧。

设ABC为所给三角形，$AB=BC$，M是所求集合的某一点，E、F和H分别是它对AB、BC和AC三条边的投影（图35），

在四边形$AEMH$和四边形$CHMF$中，因为它们的对应角相等，且由条件知相邻边成比例（$EM:MH=MH:MF$），因此它们彼此相似，由它们的对角线分成的三角形也相似：

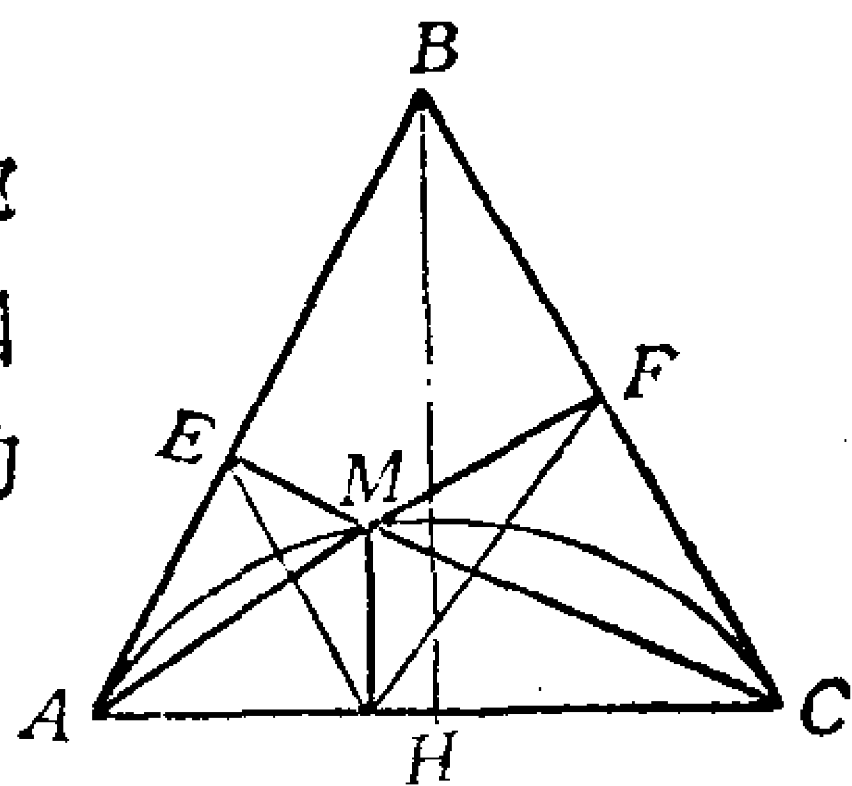


图35

$$\triangle EMA\backsim\triangle HMC,$$

$$\triangle AMH\backsim\triangle CMF.$$

由此得

$$\angle AMC=\angle AMH+\angle HMC$$
$$=\angle HMC+\angle CMF=\angle HMF.$$

于是$\angle AMC$的值是常数，由此得：点M属于以线段AC为弦的圆周的弧。

可以验证：这条弧上的任何一点都属于所求的点集。

注　如果在整个平面上而不是在三角形的内部，求到直线AB的距离等于到直线AB、BC距离的几何平均值的所有点的集合，那么所求的集合还要加上一段双曲线。

第　四　届

41．答案：三角形的三个内角分别为90°，45°，45°．

设h_a和h_b分别为a边和b边上的高．根据条件$a\leqslant h_a$，$b\leqslant h_b$，但在任何三角形中，$h_a\leqslant b$，$h_b\leqslant a$，所以$a\leqslant h_a\leqslant b\leqslant h_b\leqslant a$．就是说$a=b=h_a=h_b$，即三角形为等腰直角三角形．

42．假设$m(m+1)$是某一个自然数的k次幂．因为m和$m+1$互质，那么其中的每一个应该是某一数的k次幂，然而这是不可能的，因为如果$m=a^k$，那么$(a+1)^k>(a+1)a^{k-1}=a^k+a^{k-1}>m+1$（$k>1$）．

43．答案：1比2多1个．

任何一个数与它的数字和在被9除时都有相同的余数，因此在这个题中，1由那些被9除时余数为1的数：1，10，19，28，…，999999991，1000000000得到，而2由余数为2的数：2，11，20，29，…，999999992得到．

44．不管我们怎样取一组n个数（其中不是所有的数都彼此相等），n步之后这组数中的最大数一定要减小，而最小数要增大．

由此，如果不能得到一组相等的数（a，a，…，a），那么最大的数不可能始终是整数．

假设由一组数z_1，z_2，…，z_n中首先得到相同的数

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_2+z_3}{2}=\cdots=\frac{z_{n-1}+z_n}{2}=\frac{z_1+z_n}{2},$$

那么数z_i每隔一个就相等．当n为奇数时这是不可能的．

假设n为偶数，我们来看由什么样的一组数能得到数组（a，b，a，b，a，b，…，a，b）．

设

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2}=\frac{y_n+y_{n-1}}{2}=a$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_4+y_5}{2}=\frac{y_n+y_1}{2}=b$$

那么

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=2an,\quad y_2+y_3+\cdots+y_n+y_1=2nb,$$

即$2an=2nb$，所以$a=b$．

于是，不可能得到由两两相等的数构成的数组，这就证明了此题的结论．

45．1）六边形的每个角等于120°，所以它的对边互相平行，同时可以认为$AB\geqslant DE$（图36）．

现在作平行四边形$ABCK$、$CDEL$、$AFEM$，如果点K、L、

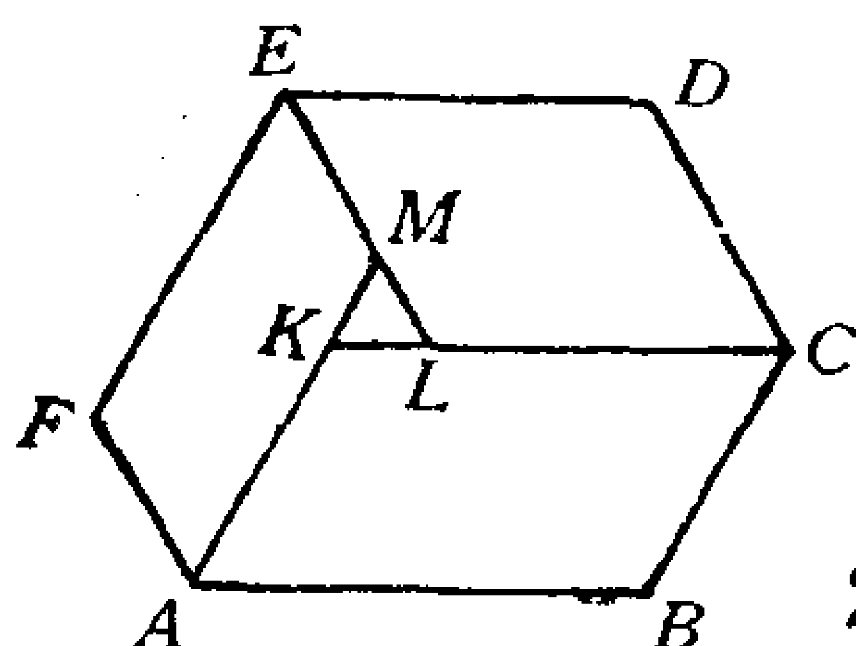


图36

M不重合，那么三角形KLM的所有角都是60°，由此得$KL=LM=KM$，所以

$AB-DE=CD-FA=FE-BC$.

2）可以认为$a_1>a_4$. 作正三角形KLM，其边为

$$KL=LM=MK=a_1-a_4=a_3-a_6=a_5-a_2.$$

在KL的延长线上截取线段$LC=a_4$，在LM的延长线上截取线段$ME=a_6$，在MK的延长线上截取$KA=a_2$，并作平行四边形$AKCB, CLED, AFEM$，所得的六边形$ABCDEF$即为所求。

46. 答案：唯一解$x=y=0$.

设x和y为满足条件的整数，在一系列二次方后得到：

$\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$及$\sqrt{x}=k$是整数，同时

$$m^2=k(k+1). \quad *$$

如果$k>0$，那么应该有$k^2<m^2<(k+1)^2$，于是$k<m<k+1$. 因此m不是整数。就是说$k=0$，即$x=0$.

注　我们顺便指出，由第42题也可得到恒等式（＊）的矛盾性。

47. 设A_1、B_1、C_1、D_1分别为从顶点A、B、C、D向对角线BD和AC所作垂线的垂足，O为对角线的交点，α为它们之间的夹角（图37）。那么$OA_1=OA\cdot\cos\alpha$；$OB_1=OB\cdot\cos\alpha$；$OC_1=OC\cdot\cos\alpha$；$OD_1=OD\cdot\cos\alpha$. 因此三角形A_1OB_1、B_1OC_1、C_1OD_1和D_1OA_1相似于三角形AOB、BOC、COD和DOA，相似系数为$\cos\alpha$.

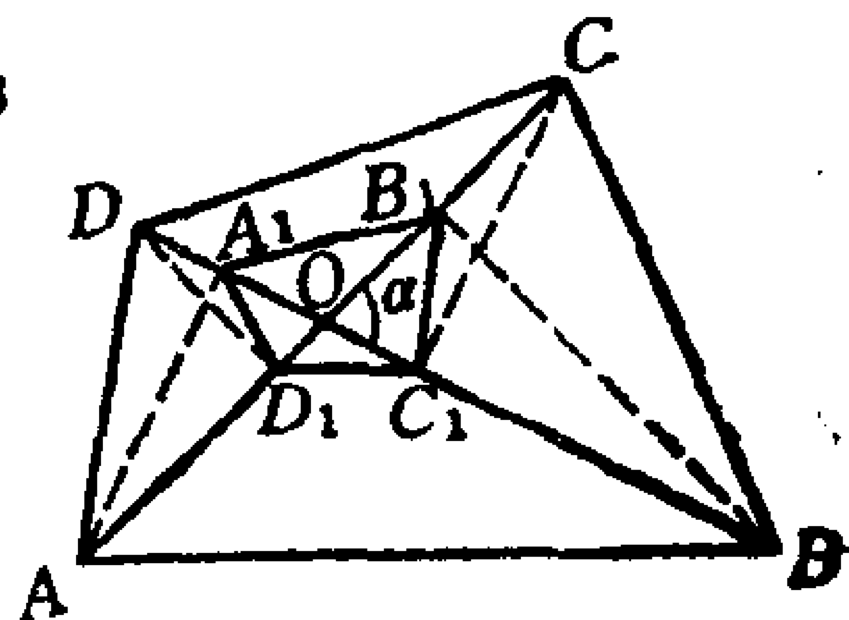


图37

由此得四边形$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$相似。

注　顺便指出，第二个四边形能用下列变换的合成得到：关

于对角线夹角的平分线的对称变换、中心在O系数为$\cos\alpha$的同位相似变换。

48．答案：n是素数以及$n=9$。

如果n能表示为$n=ab$，其中$a\geqslant3$，$b\geqslant3$，$a\neq b$，那么a、$2a$及b、$2b$是乘积$1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)$的因子，所以$(n-1)!$能被$a^2b^2=n^2$整除。

如果$n=p^2$，p为素数，那么$p^2-1\geqslant4p$时，p、$2p$、$3p$和$4p$是乘积$(p^2-1)!=1\cdot2\cdot3\cdots(p^2-1)$中的因子，因此$(p^2-1)!$能被$p^4=n^2$整除（当素数$p\geqslant5$时不等式$p^2-4p-1\geqslant0$成立）。

所以只有两种可能：n为素数（在这种情形$(n-1)!$不能被n^2整除）以及$n=9$（此时$8!$能被9整除，但不能被81整除）。

注　根据关于素数的著名威尔逊定理，当p是素数时，$(p-1)!$在除以p时始终有余数$p-1$。

49．把甲虫爬过的线段按顺序标号，并考察三种有向线段中的一种——我们称之为水平线段．我们要证明甲虫爬过的路径中所有水平线段的号码有相同的奇偶性。

设a和b为这条路径上的两条相邻的水平线段（这可理解为，在a和b之间的路径是由另外两个方向的线段构成的），如图38所示，当甲虫通过由包含a、b的两个六边形组成的竖直带条时，它不可能从点P沿着粗实线向前、向上经过b至点Q再沿虚线爬回P，因为此时甲虫的路程就会缩短了．由此得出：在a和b之间的中间线段的数目为奇数，且在这些线段上甲虫朝一个方向爬行．因此甲虫路径的所有水平线段的号码有相同奇偶性（因此甲虫在其上朝一个方向爬行）．

这里涉及到另外两个方向的线段．因为总共3个方向，那么或者有偶数号码的所有线段，或者有奇数号码的所有线段有相同的方向．那样的线段正好50条．

注　甲虫在网上的任何路径可以用初始结点和由p、q、r组成

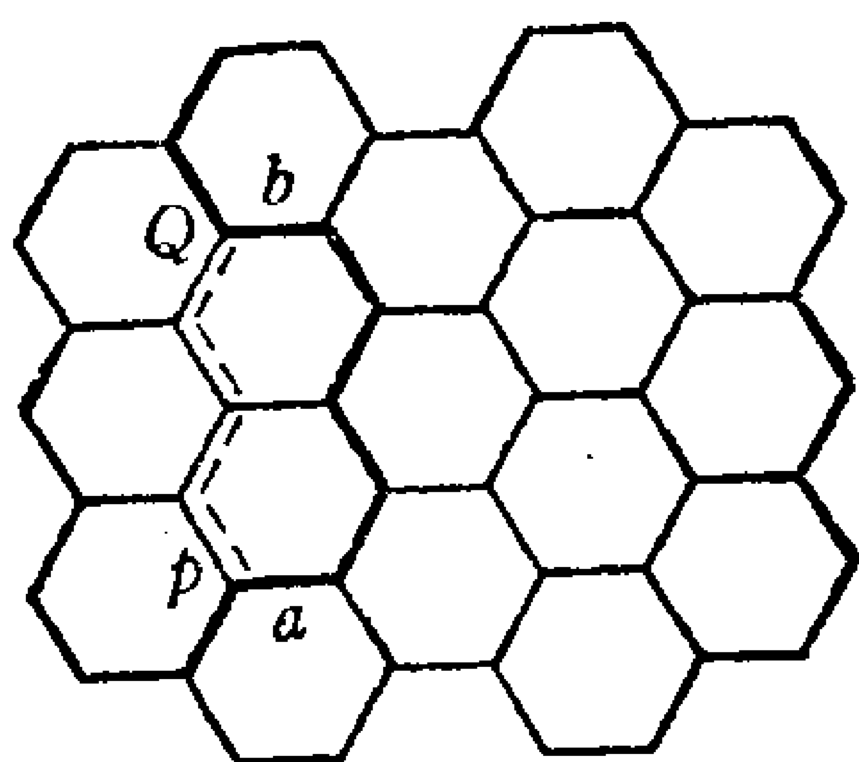


图38

的"单词"（每个字母对应于路径的平行于三个方向之一的线段）给出．有意思的是写出对应于闭的（回到初始结点的）或不自相交的路径的"单词"．

50．设O是四边形$ABCD$的内切圆心（图39）．

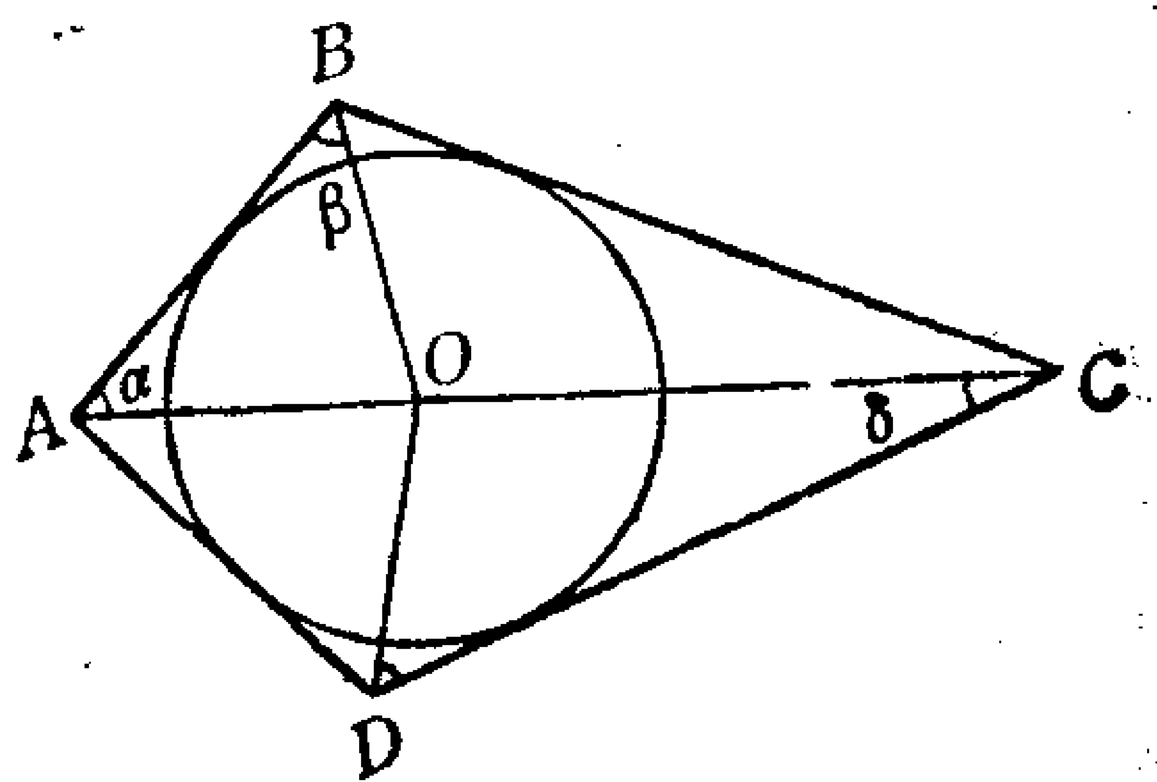


图39

因为$\angle AOB=180-\alpha-\beta$，$\angle COD=180^\circ-\gamma-\delta$，而$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=180^\circ$，所以$\angle AOB+\angle COD=360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=180^\circ$．

51．因为$k^n-b^n=(k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$，所以$k^n-b^n$被$k-b$整除．

于是对任何$k\neq b$，$(k^n-b^n)-(k^n-a)=a-b^n$能被$k-b$整除，但仅当$a=b^n$时它才成立．

52．答案：2^{n-2}个分数．

首先显然有，x_1将在所得分数的分子上；当任意加括号时，x^2都在分母上（在x_2前的除号或者与x_2有关，或者是与使x_2在其分子上的某个表达式有关）．

而其余的字母x_3、x_4，…，x_n可以完全以任意方式在分子上或分母上．由此得出总共可以得到2^{n-2}个分数，因为$n-2$个字母x_3，x_4，…，x_n中的每一个字母可以不依赖于其余字母而落在分子上或分母上．

我们将用归纳法来证明这个结论．当$n=3$时，可以得到2个分数：

$$(x_1:x_2):x_3=\frac{x_1}{x_2x_3}\text{及}x_1:(x_2:x_3)=\frac{x_1x_3}{x_2}.$$

所以结论成立。

假设结论对$n=k$成立，我们来证明它对$n=k+1$成立。

设在某次加括号后表达式$x_1:x_2:\cdots:x_k$能写成某个分数A的形式，如果在这个表达式中用$x_k:x_{k+1}$代替x_k，那么x_k仍将在它原先在A中所在的位置，而x_{k+1}将不会在x_k原先的位置上（如果x^k原先在分母上，那么x_{k+1}就会在分子上，并且反过来也对）。

现在证明，可以把x_{k+1}加到x_k所在的位置上去。在分数A中加括号之后一定会有$(p:x_k)$形式的表达式，其中p为字母x_{k-1}或者某个括号。用表示式$((p:x_k):x_{k+1})=p:(x_k\cdot x_{k+1})$来代替$(p:x_k)$后，显然得到同一个分数$A$，其中$x_k\cdot x_{k+1}$代替了$x_k$。因此结论得证。

53。容易看到，立方体能分成5个四面体。在图40上这些四面体是$AA'B'D'$、$AB'BC$、$ACDD'$、$B'C'D'C$和$ACD'D'$。

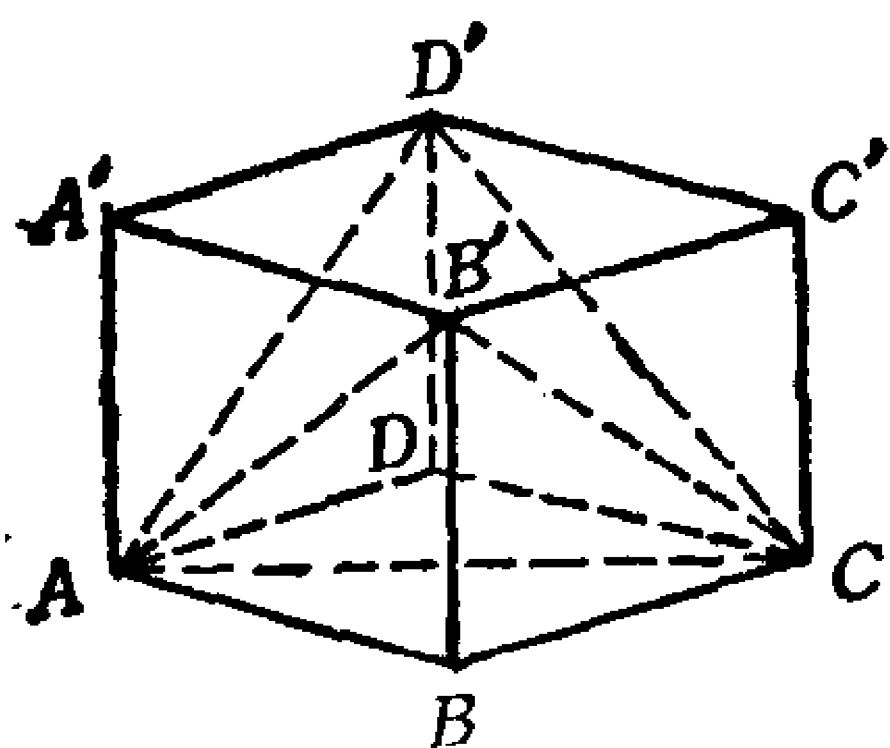


图40

现在我们证明立方体不可能分成较少个数的四面体。设立方体分成4个四面体，其中至少有两个四面体的底面在立方体的侧面$ABCD$上。同样也至少有两个四面体的底面在侧面$A'B'C'D'$上。

这两个四面体显然与前面两个不同，因为四面体不可能有两个平行的面，于是我们已有4个四面体，它们的总体积不大于$2a^3/3$，即小于立方体的体积。因此立方体不可能分成4个四面体。

54。答案：$41^2=1681$。

设n^2满足此题要求，那么$n^2=100a^2+b$，其中$0<b<100$。因此$n>10a$，所以$n\geqslant 10a+1$。这就是说，$b=n^2-100a^2\geqslant 20a+1$，于是$20a+1<100$，$a\leqslant 4$。

当$a=4$时，只有$n=10a+1=41$满足条件．
如果$n>41$，那么$n^2-40^2\geqslant 42^2-40^2>100$。

注　第224题是这个问题的继续．

55．设S_1、S_2、S_3、S_4及$2p_1$、$2p_2$、$2p_3$、$2p_4$分别为三角形ABE、BCE、CDE和DAE的面积和周长．需要证明等式：

$$\frac{p_1}{S_1}+\frac{p_3}{S_3}=\frac{p_2}{S_2}+\frac{p_4}{S_4}.$$

因为$ABCD$是梯形，$S_1=S_3=S$．因为$ABCD$为外切四边形，$AB+CD=BC+AD$．在这个等式两边加上对角线的和，得到$2p_1+2p_3=2p_2+2p_4$．为了由此得到所要求的等式，需要把这个等式两式同除以2S，并利用下列等式

$$\frac{S_2}{S}=\frac{S}{S_4}=\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{AB}{CD}=\frac{p_2}{p_4};$$

$$\frac{p_2}{S}=\frac{p_4}{S_4};\ \frac{p_4}{S}=\frac{p_2}{S_2}.$$

第　五　届

56．答案：最小值S_{min}等于$-[n/2]$，即如果n为偶数，则等于$-n/2$；如果n为奇数，则等于$-(n-1)/2$.

1）x_1，x_2，…，x_n的一切可能的两两乘积之和S可记为

$$S=\frac{1}{2}((x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2).$$

由此显然　　$S\geqslant -n/2$。

如果n为偶数，我们取一半的x_k等于1，另一半等于-1，则得到$S=-n/2$。如果n为奇数，那么（因为S是整数）$S\geqslant -(n-1)/2$；如果x_k中有$(n+1)/2$个1和$(n-1)/2$个-1，则能达到极小值S。

2） 可以归结为1）：每一个x_k可以依次替换成1或-1，使一切可能的两两乘积之和不增加（替换法则：如果其余数的和非负，则x_k改为-1；如果其余数的和为负，则x_k改为1）。因此这里有与1）中同样的答案。

57. 设$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_9$是卡片上所写的数。如果$a_1+a_9>a_2+a_8$，那么第一个人把$a_9$放到格子1中去(图41)，在第二步时他把$a_2$（或$a_1$）放到格子2或格子3中。如果$a_1+a_9<a_2+a_8$，那么第一个人把$a_1$放到格子2中，把$a_9$（或$a_8$）放到格1或格4中。如果$a_1+a_9=a_2+a_8$，那么第一个人可以应用上述任一种方法（在第二个人进行合乎规则的游戏时，此时结果是平局）。

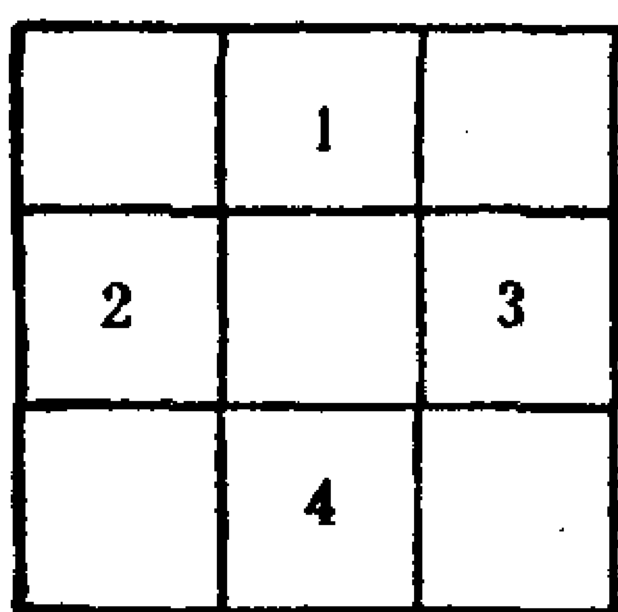


图41

58. 设L、M和N为弧AB、BC和CA的中点，O为三角形ABC内切圆的圆心，D、K分别为线段LN与边AB、AC的交点（图42）。

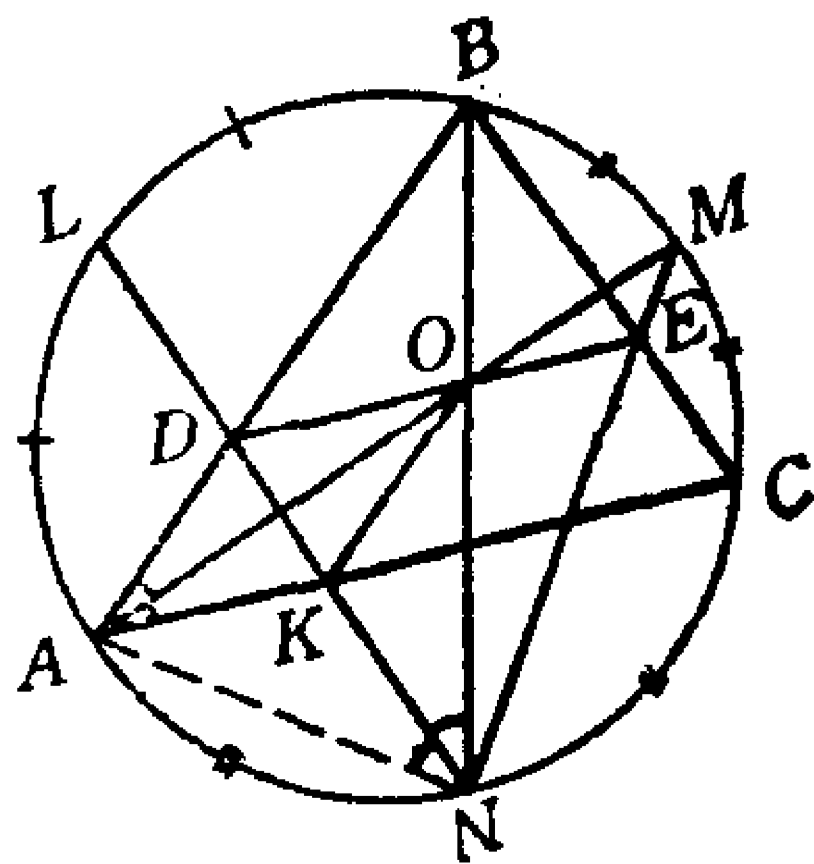


图42

我们要证明，四边形$ADOK$是菱形（顺便解了第237题）。为此只要证明对角线AO和DK是这个四边形的对称轴。

事实上，$AM \perp LN$，因为$\overset{\frown}{LB}+\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AN}=180°$，因此点$D$和$K$关于直线$AM$（角$BAC$的角平分线）对称，点$A$和$O$关于直线$LN$（角$ANB$的角平分线）对称。

由此得出，$DO \parallel AC$。类似地可证明，$EO \parallel AC$，其中E为线段MN与BC边的交点。于是点D、O和E在平行于AC的一条直线上。

59. 如果幸运票的号码是A，那么号码为$A'=999999-A$的票也是幸运的，而且$A' \neq A$。因为$A+A'=1001\times999=13\times77\times999$能被13整除，那么所有幸运票号码的和能被13整除。

60. 如果汽艇在点A进入被探照灯照射的圆K，那么经过时间段$5\pi/2\cdot a/v$后，它在图43中用斜线标出的圆K与半径为$5\pi a/16<a$、中心在A的圆的公共部分的一个点上。此时它与点A的距离将不超过$5\pi/2\cdot a/v\cdot v/8$，容易看到，在这段时间内探照灯的光柱旋转了$5\pi/2$角度，并搜索了用斜线标出的整个区域，所以汽艇将被发现。

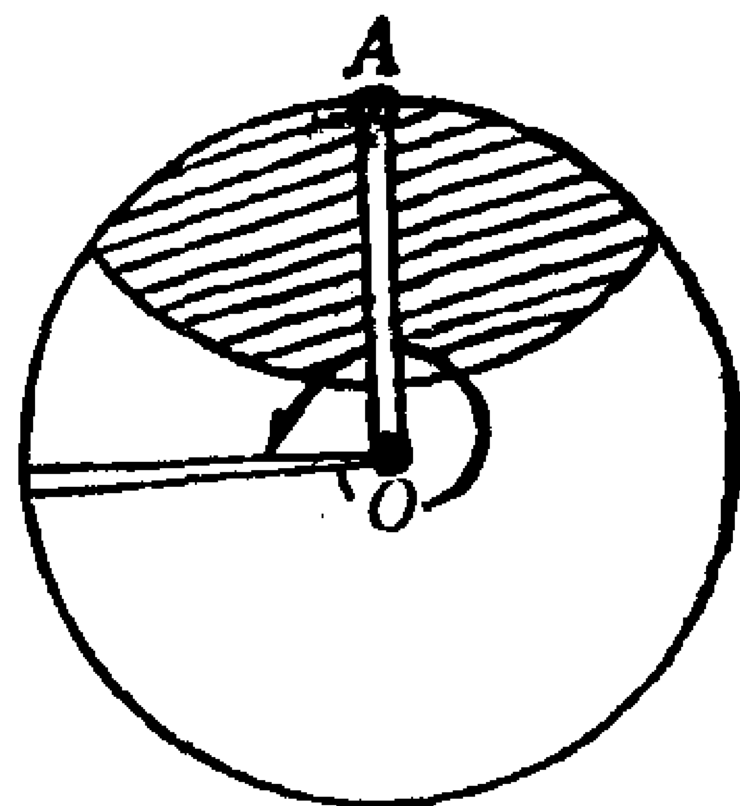


图43

注　更巧妙的结论表明汽艇可以用来接近岛屿的最小速度是$v_{min}=v\cos\beta$，其中β为方程$2\pi+\beta=\mathrm{tg}\beta$的根，$0<\beta<\pi/2$；$v_{min}\approx 0.13v$。

61. 我们选出一个值班民兵。如果所要求的值班办法可行的话，那么其余99个民兵就应该分成若干组，每组两人，每一组都可以与所挑出的民兵一起值班，但这是不可能的，因为99是奇数。

62. 设x为所求线段的长，b为三角形ABC的底边AC的长（图44），三角形BDE的周长等于$2p-2b$（利用圆周的切线性质可以证实这一点）。

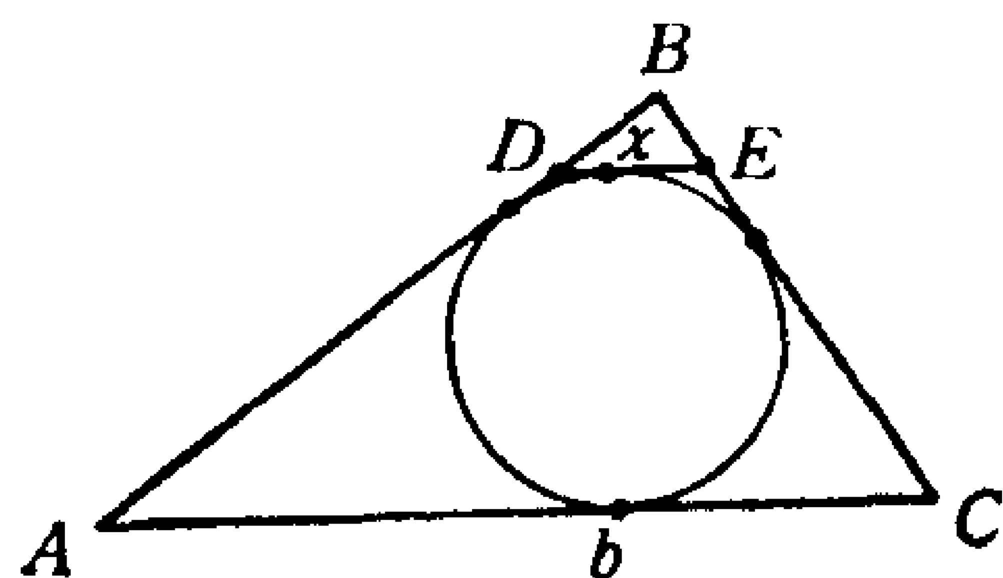


图44

由$\triangle BDE$与$\triangle ABC$相似我们得

$$x=\frac{1}{p}b(p-b)=\frac{1}{p}\left(\frac{p^2}{4}-\left(b-\frac{p}{2}\right)^2\right).$$

x的最大值等于$p/4$，且在点$b=p/2$达到最大值。

63. 不难证明：$X_{ii}=0$，且对于一切i、k有$x_{ik}=-x_{ki}$。现在固定i，j（$k=1, 2, \cdots, n$）把n个方程$x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=0$相加，我们得

$$nx_{ij}=S_i-S_j,$$

其中S_j是形式为x_{jk}（$k=1, 2, \cdots, n$）的一切数之和。现在设$a_i=S_i/n$，那么$x_{ij}=a_i-a_j$，这就是所要求的。

64。答案：能。

在正方形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$中的直线$y=1/2$上均匀地放置$c_0=200$个点（$k/201$，$1/2$），$k=1, 2, \cdots, 200$。然后在直线$y=1/4$和$y=3/4$上各放$c_1=100$个点（$k/101$，$\frac{1}{4}$），（$k/101$，$3/4$），$k=1, 2, \cdots, 100$。重复这些过程，当$m=2, 3, \cdots, 7$时，在每一条直线$y=(2l-1)2^{-m-1}$，$1\leqslant l\leqslant 2^m$上各放$c_m$个点$\left(\frac{k}{c_m+1}, \frac{2l-1}{2^{m+1}}\right)$，其中$c_m=[200\cdot 2^{-m}]$（当$m=7$时在128条相应直线上各放一个点），总共放了

$$\sum_{m=0}^{7}2^m c_m=200+2\cdot 100+4\cdot 50+8\cdot 25+16\cdot 12+32\cdot 6+64\cdot 3+128=1704$$个点。这个过程见图45。

显然，在所放点之间不能再挤进面积为1/200的任何矩形。如果它与直线$y=\frac{1}{2}$相交，那么它的底边不大于1/201；如果不相交，那么它完全在这条直线的上面或下面。同时，如果它与直线$y=3/4$或$y=1/4$相交，它的高不超过1/2，而底不超过1/101，等等。如果矩形整个在形如$y=n/256$（$n=1, 2, \cdots, 255$）的直线之间，那么它的高不超过1/256。

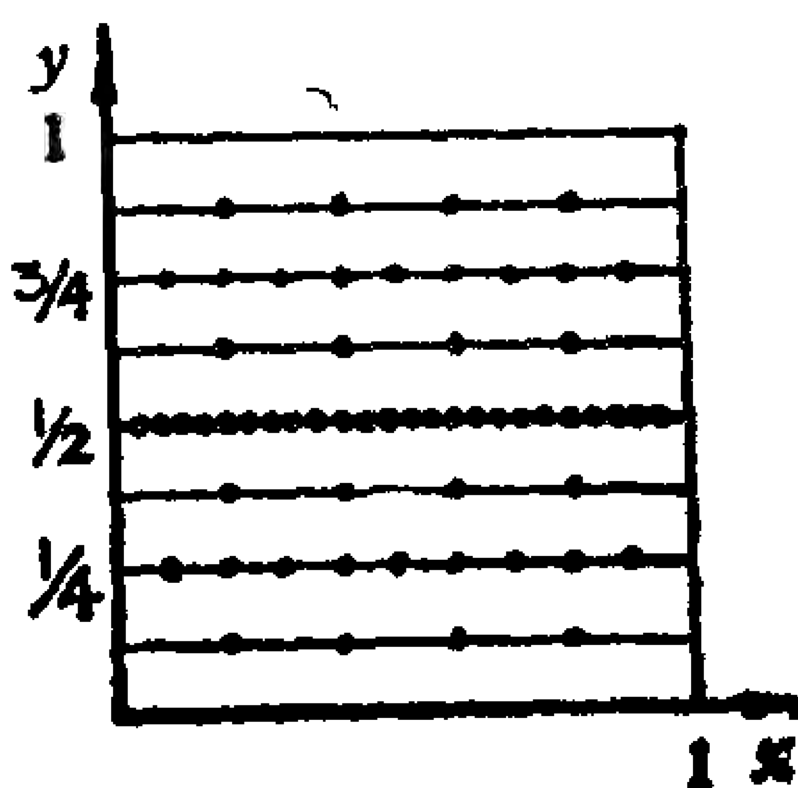


图45

65。设x_1、x_2、$\cdots$、x_n为已知数，它们按照小数部分$\alpha_i=x_i-[x_i]$递增的顺序来编号。我们把这些数中的前k个朝小的那一边取整，把其余的数朝大的那一边取整；k将在后面求出。容易看到，在计算这两个和

$$x_1+x_2+\cdots+x_k \text{ 或 } x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n$$

中的一个时，就能得到四舍五入的最大误差，第一个误差的绝对值是：

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k\leqslant k\alpha_k,$$

第二个误差的绝对值是：

$$(1-\alpha_{k+1})+\cdots+(1-\alpha_n)\leqslant(n-k)(1-\alpha_{k+1}).$$

现在我们选取k，使它满足不等式

$$k\alpha_k\leqslant(n+1)/4 \text{以及} (n-k)(1-\alpha_{k+1})\leqslant(n+1)/4.$$

为此只要取使第一个不等式成立的最大的k即可．那么$\alpha_{k+1}>\frac{n+1}{k+1}$，由此得到第二个不等式$1-\alpha_{k+1}<1-\frac{n+1}{4(k+1)}\leqslant\frac{n+1}{4(n-k)}$（因为$\frac{n+1}{4(k+1)}+\frac{n+1}{4(n-k)}=\frac{(n+1)^2}{4(k+1)(n-k)}\geqslant1$，$0<k<n$）．

注　当n为奇数时，此题中所作的误差估计是准确的（例如$x_1=x_2=\cdots=x_n=1/2$）．当n是偶数时可以适当地加以改进，即用$\frac{n+1}{4}-\frac{1}{n+1}$代替$\frac{n+1}{4}$．（例如$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{n}{2(n+1)}$．）

66．游客离开咖啡店后可以选择具有下面条件的任何一条路线：他来到广场后，要选择他曾经走过奇数次而来到此地的马路．不难看到，除去车站的十字路口外，在任何十字路口都有那样的马路（事实上，游客来到十字路口的次数要比离开十字路口的次数多1），而且所得到的路线不可能两次重复通过一条马路．因为马路的数量有限，那么游客一定能走回车站．

67．1）解法1．每两位委员可以在不多于一次的会议上相遇．那么在每一次会议上就有$C_{10}^2=45$对相遇，因为开了40次会，则委员中至少有$1800=45\cdot40$对相遇．但是由60个人（或者少于60个）至多能组成$C_{60}^2=60\cdot59/2=1770$对，　　$1770<1800$．

解法2．设委员数N不多于60．那么，因为$10\cdot40/N>6$，

则存在至少出席7次会议的人，而与这样的人见过面的人不是同一个人．而且他们的总人数等于$7\cdot 9>59$，矛盾．

2）解法同1）．

注 有趣的是这里所作的估计是准确的：可以组成满足要求的30个委员会，每个委员会有5个成员．

68．答案：2）$(p-1)(q-1)/2$．如果p和q是互质的自然数，那么每一个整数z能表示为形式$z=px+qy$（索2）．任何一个这样的表示都能由某一个固定的$z=pa+qb$按照一般公式$z=p(a-qt)+q(b+pt)$得到，其中t是整数，同时存在使$0\leqslant x\leqslant q-1$的唯一的表示．

我们可以把每一个整数z与整数对(x,y)相对应，这里$0\leqslant x\leqslant q-1$，$z=px+qy$．同时不同的数与不同的数对相对应．而且仅当$y\geqslant 0$时，$z$是好的．（如果$z=px+qy$是好数，那么当$x=qt+r\geqslant 0$时有$z=pr+q(y+t)$，$0\leqslant r\leqslant q-1$．）

现在顺便指出，如果数$z=px+qy$是好数（$0\leqslant x\leqslant q-1$），那么数$z'=(q-1-x)p+(-1-y)q$是坏数；反过来，如果$z$是坏数，则$z'$是好数．而且点$(x,y)$和$(q-1-x,-1-y)$关于点$(x_0,y_0)=\left(\frac{q-1}{2},-\frac{1}{2}\right)$对称，而数$z$和$z'$关于点$z_0=px_0+qy_0=(pq-p-q)/2$对称，因为$z+z'=pq-p-q=2z_0=c$．

所以1）得证：好数z对应于坏数$c-z=z'$，反过来也对．因为最小的好数等于0，那么最大的坏数将是c．共有$(c+1)/2=(p-1)(q-1)/2$个坏数．

注 在解这个题时利用几何作图很有用：数对(x,y)是平面上的格点，$px+qy=z$是过格点的直线．

69．答案：过$\pi/200$小时．应当指出，此题条件中所假想的火箭轨道是半径小一半的圆周（图46）：弧$\overset{\frown}{AR}$的度数是$\angle QAR$

（弦切角）的度数的两倍，即是弧$\overset{\frown}{QP}$的度数的两倍，而弧$\overset{\frown}{QP}$的半径是弧$\overset{\frown}{AR}$的半径的两倍，因此弧$\overset{\frown}{QP}$和$\overset{\frown}{AR}$的长度相等（对于R的每一个位置）．火箭与飞机相遇时，飞机走了1/4圆周，而火箭走了半个圆周．

注 显然，应该证明满足条件的火箭轨道的唯一性（对奥林匹克参赛者未要求这一点，当时中学生还未学过导数），它能由关于函数的唯一性定理得出．如果在时刻t，火箭离开点A的距离$AR=AQ\cdot f(t)$（这里$f(0)=0$），那么它在垂直于半径的方向上的速度是$vf(t)$，沿半径方向的速度是$v\sqrt{1-f^2(t)}=f'(t)$，所以$\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}}=v$，即$(\arcsin f(t))'=v$，由此$f(t)=\sin vt$．

70．设A和B是多面体的两个顶点，它们之间的距离等于d．过点A和B分别作垂直于直线AB的平面．显然，整个多面体在这两个平面之间．过多面体的每一个顶点作垂直于AB的平面．我们考察所作平面之中的两个相邻平面．显然，在它们之间至少有不在同一枝上的3条线段，每条线段对直线AB的射影不小于这条线段的长度，同时这些线段中很可能有不平行于AB的线段．因此所有棱长之和大于$3AB=3d$．

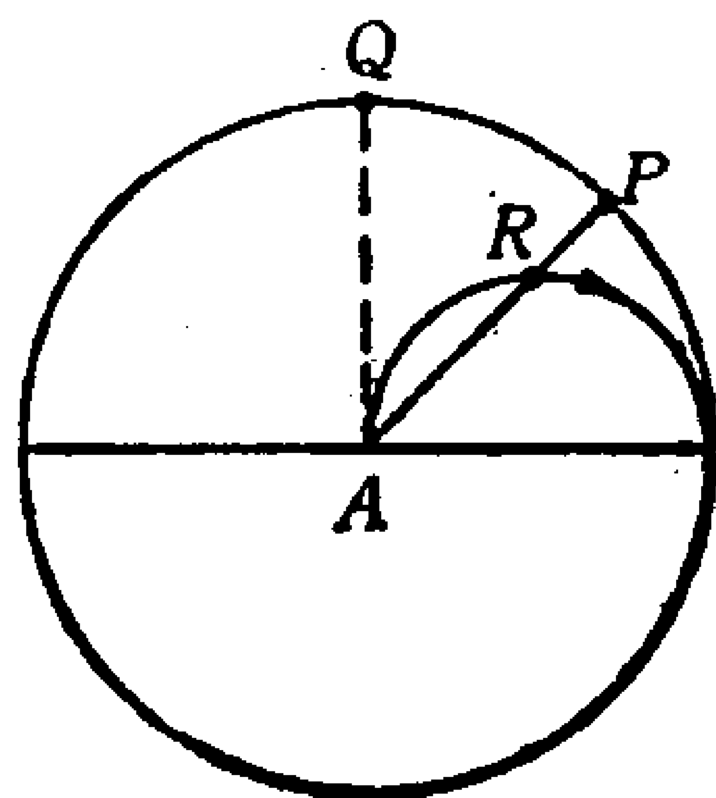


图46

这个解法有下面的简明解释：多面体的框架对一条线段的射影至少3次覆盖了这条线段．

71．取行星的半径为1．在行星上任取两个点(极点)，使它们的连线通过球心，且过这两点作一条“基本的”子午线，再把它分成长为ε的等弧，并过分点作纬线（图47）．

假设宇航员的搜索计划如下：飞船在所作纬线上空且与球心相距$R>1$时开始绕行星飞行，同时从北极地带开始每当飞到基本子午线时，就沿着它改飞到下一条纬线．现在设$R=\sqrt{2}$．那

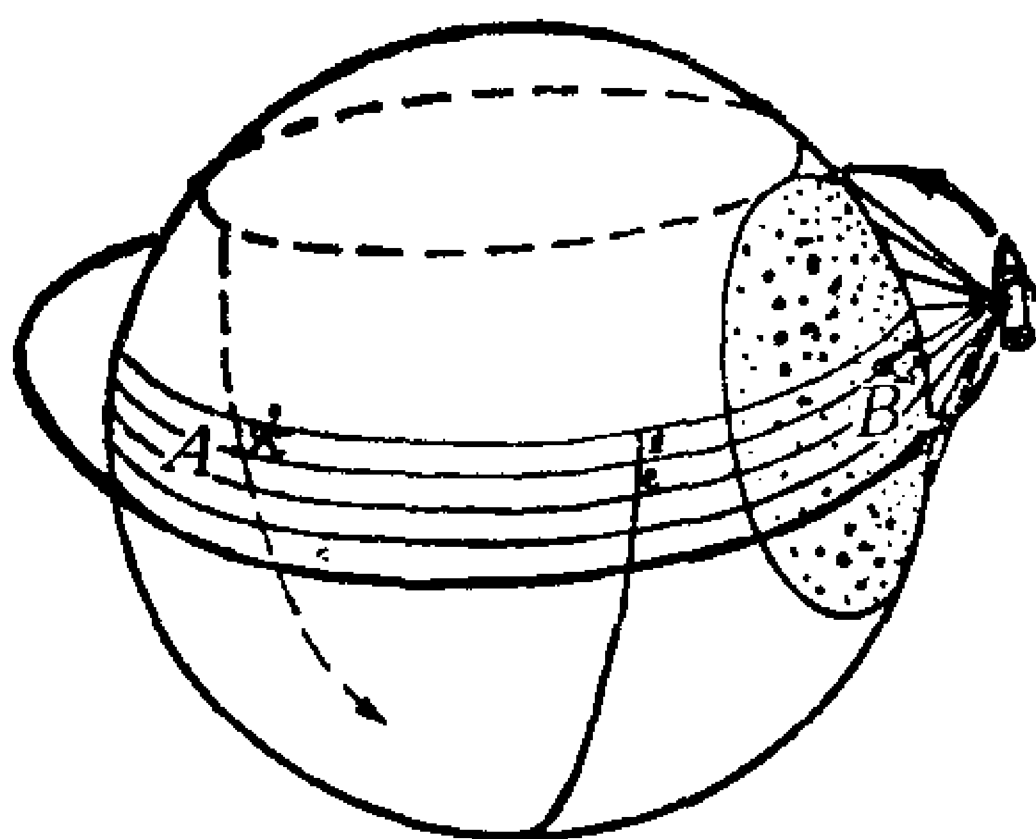


图47

么从飞船上可以看到半径为$\pi/4$的球冠（一切距离都是沿球面测量的）.

因为ε可以选择得任意小，只需要验证，在速度比大于10且飞船沿着一条纬线飞行时，行星上的居民来不及从南往北越过飞船的“发现圈”，这几乎是显然的．“发现圈”的圆心沿着纬线移动，它的移动速度至少是居民速度的$10/\sqrt{2}$倍．如果居民在点A穿越纬线，而飞船在点B，那么纬线的弧$\widehat{AB}$之一的弧度不大于π；当飞船飞过它时，居民的所在位置与点A的距离不超过$\pi\sqrt{2}/10<\pi/4$．所以当人在A点时飞船的宇航员应该能（已经或将要）看见他．

第 六 届

72．取两个彼此相距最近的行星．显然在这两个行星上的天文学家能互相观察．

还有$n-2$个行星和$n-2$个天文学家．即使他们之中的一个人观察上面已选好的一个行星，那么再要观察$n-2$个行星之中的一个行星天文学家就不够用了．如果任何人不再观察这两个已选好的行星，那么再次应用同样的方法：从$n-2$个行星中选取两个最近的，往下依此类推．因为n是奇数，最后剩下一个谁也不观察的行星．

73．1）如果点P在直线AD上，结论显然成立．

设点P不在AD上且O是线段AD的中点．且设P'是点P关于O的对称点．那么四边形$BPCP'$和$P'APD$是平行四边形，且$AP+PD=AP'+AP>P'B+PB=BP+PC$．

2）已知P为任意点．取$P=A$，那么得到$AD \geqslant AB+AC$．现在设$P=D$，那么$AD \geqslant BD+DC$．把这些不等式相加得到$2AD \geqslant AB+AC+BD+CD$．

另一方面，总有$AD \leqslant AC+CD$，$AD \leqslant AB+BD$，同时仅当三点在一条直线上时每一个不等式中的等号成立．把它们加起来得到$2AD \leqslant BD+AB+AC+CD$．因此$2AD=BD+AB+AC+CD$．由此立刻得出，点$A$、$B$、$C$、$D$在一条直线上，而且前面所写不等式都变成了等式．因此得到点B、C在线段AD上且$AB=CD$．

74．答案：不存在那样的x、y．

事实上，设$x \geqslant y$，那么$x^2<x^2+y \leqslant x^2+x<(x+1)^2$，即$x^2+y$不是整数的平方．

75．1）只要证明按身高排列的第k个8年级学生高于按身高排列的第k个7年级学生即可．设A是按身高排列的第k个7年级学生，则至少存在k个7年级学生（包括A）不比A矮．站在他们后面的k个8年级学生都比A高，因此按身高排列的第k个8年级学生比A高．

2）可归结为1），只要对于任何两列纵列进行同样的推理即可．

76．设在$m \times n$个格子的格纸上给定矩形$ABCD$（图48）．用b_1、d_1、b_2、d_2、a_2分别表示从顶点B_1、D_1、B_2、D_2、A_2到C的在方格线上的最短路径的数量．此题主要证明$d_1/b_1=n/m$．

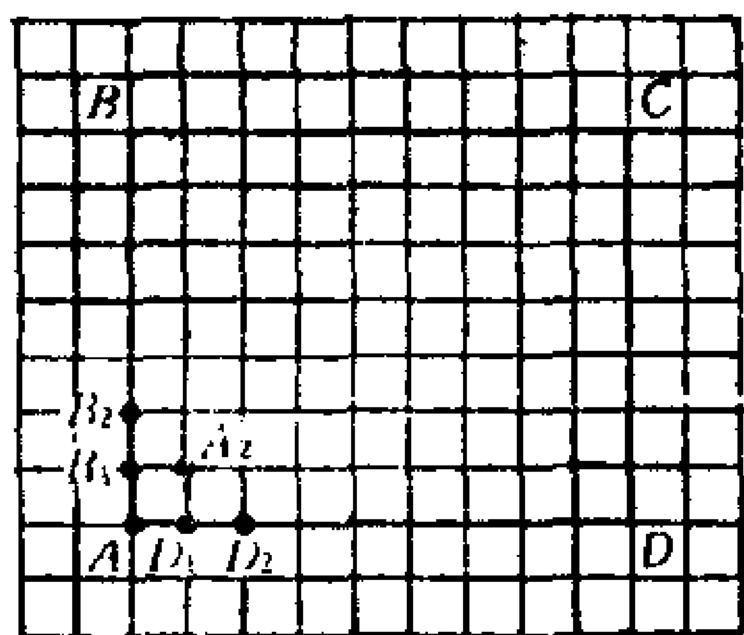


图48

我们用关于$m+n$的数学归纳法来证明，同时所得结果也适用于$n/m=k$不一定是整数的情形．

当$m=1$或者$n=1$时显然．我们将认为$m>1$，$n>1$．由归纳假设，对于$(m-1)$

$\times n$以及$m\times(n-1)$的矩形有

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{n}{m-1},\quad \frac{d_2}{a_2}=\frac{n-1}{m}.$$

因此 $\dfrac{d_1}{b_1}=\dfrac{d_2+a_2}{b_2+a_2}=\dfrac{d_2/a_2+1}{b_2/a_2+1}=\dfrac{(n-1)/m+1}{(m-1)/n+1}=\dfrac{n}{m}.$

注 在解这个题时实质上是证明了等式

$$mC_{m+n-1}^{m-1}=nC_{m+n-1}^{m}=(m+n-1)C_{m+n-2}^{m-1}.$$

（在此题中$n=km$）. 在知道了关于C_n^m的公式后不难验证它. 但是反过来可以用这些算式来推出组合数的一般公式.

77. 用数学归纳法来证明. 当$n=1$时结论显然成立.

假设对于n个数a_2、a_3、…、a_{n+1}，它们的和S'有形式$\pm a_2\pm a_3\pm\cdots\pm a_n$，且$0<S'<a_2$.

那么或者$0\leqslant S'\leqslant a_1$，由此得到$0\leqslant S=a_1-S'\leqslant a_1$；或者$a_1<S'\leqslant a_2\leqslant 2a_1$，由此得到$S=S'-a_1\leqslant a_2-a_1\leqslant a_1$. 这就是所要证的.

78. 我们对面积为S、周长为P的任意凸n边形来解这个题.

假定这个多边形的边长分别为a_1、a_2、…、a_n（$a_1+a_2+\cdots+a_n=P$）. 我们考察以P为底边面积为S的矩形，显然它的高等于S/P.

现在用竖直线段把这个矩形分成底边分别为a_1、a_2、…、a_n的n个矩形，并且把所得的每一个矩形从里面贴到多边形的对应的边上. 某些矩形将互相有重叠的部分，而某些矩形可能要露出已知的多边形. 因为它们的总面积等于S，多边形的面积也等于S，因此这些矩形不能完全覆盖这个多边形. 任何一个未被覆盖上的点都可以作为所求圆的圆心，这个圆的半径等于S/P.

注 对于四边形来说可以用其它方法来解，但是在奥林匹克竞赛中若干个参赛者想出了对任何多边形都适用的方法.

79．把构成道路的线段的数目称为道路的长度．设n是从A到B的最短道路的长度．我们用关于n的数学归纳法来证明．

当$n=1$时，除去最短路AB之外，存在从A通向十字路口$C\neq A$的路（C到B的距离等于1），且这条路不经过B．

假设$n>1$，D是位于从A到B的最短路之上的、离A最近的十字路口．由归纳假设从D到B存在两条不相交的路p和q．我们将从A出发走过不通过D的路l，如果这条路不与p、q相交，那么一切都得证；如果它，比如说，最初与P相交，那么往前应该沿着P径直朝B走去，所得的路不与q相交．

80．设h^*和PH分别是从点A、P所作的四面体的高，h_a、h_b、h_c分别为三角形ABC的三条高，PL是三角形PBC的高．

我们有$h^* S_{PBC}=HP\cdot S_{ABC}$，而因为$h^*\geqslant HP$，则$S_{PBC}\leqslant S_{ABC}$，由此得到$PL\leqslant h_a$，因而$HL<PL\leqslant h_a$．于是从$H$到直线$BC$的距离小于$h_a$．所以，点$H$在由两条平行线构成的带形内部，这两条平行直线与直线BC的距离等于h_a．

类似可证明点H与AC和AB的距离分别小于h_b和h_c．于是点H属于三条带形的交集，即在三角形$A_1B_1C_1$的内部，点A、B、C是这个三角形3条边的中点．反之，如果点H是$\triangle A_1B_1C_1$内的任意一点，在点H附近选取使直线PH垂直于平面ABC的点P，那么从点P到三角形ABC之边的距离小于相应边上的高，且PH是四面体$PABC$的最小的高．

81．我们以每一个已知点为圆心作一个半径等于1/2的圆，这些圆的直径之和等于100．

如果某两个圆相交，那么就用包含这两个圆的、且直径最小的圆来代替这两个圆，同时直径的和并未增大，而圆的个数减少了．重复这种做法就能得到包含所有已知点的一系列两两不相交的圆，它们的直径之和不大于100．我们注意到，从每一个点到包含它的那个圆的边界的距离不小于1/2．

设r为圆之间的最小距离．如果$r>1$，那么此题就得证了．如果$r\leqslant 1$，我们就把每一个圆代之以一个同心圆，它的半径比原半径小$1/2-r/3$．这样所得到的一系列圆完全符合要求．

82．答案：$2d/(\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2))$千米/秒．

设飞机在1秒钟内从P点移动到Q点，$PQ=r$．如果$AB=d$是常数，使我们感兴趣的是r的可能最小值；我们可以代之以求d/r的最大值，同时认为r是常数．

现在可以把问题变为以下形式：在对已知线段PQ的视角分别为α、β的一切空间点A、B中，求使AB有最大值的点．

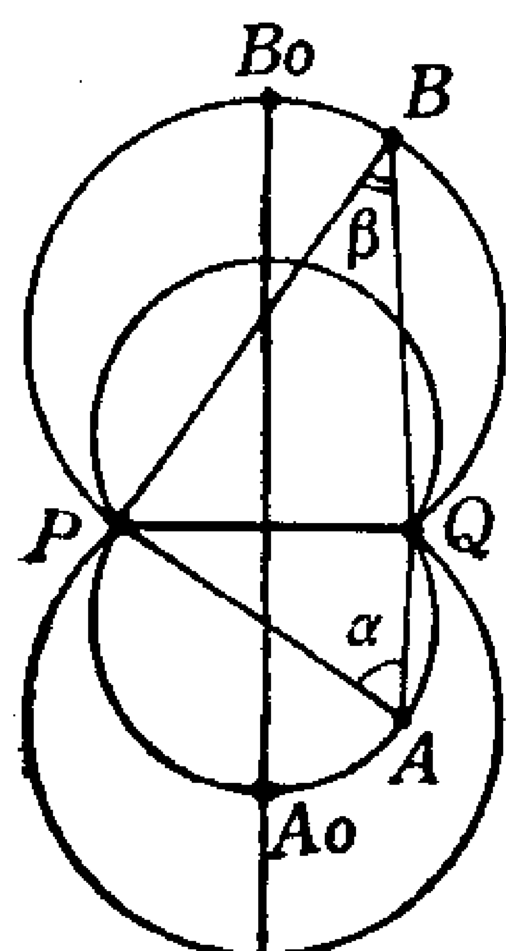


图49

因为$\angle PAQ=\alpha$，那么点A位于由能放下角α的弓形绕着它的弦PQ旋转所得到的球面上，点B也在类似的球面上（图19中表示了这些球面的轴截面）．容易证明：点A和点B之间的最大距离能够达到，如果这些点的连线正好通过PQ的中点(图中的点A_0和B_0)．对于点A、B的那样位置有$2d/r=\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)$．由此得到答案．

83．答案：30．我们来描述第二个人能保证他得到最大和的策略．把所有数分成若干数对：（1，2）、（3，4）、…、（19，20）．每当第一个人在除去19和20以外的任何一个数之前放上某一个符号后，第二个人应该在那个数对中的另一个数之前放上相反的符号．当第一个人在最后一对的某一数之前放在一个符号后，第二个人在这对数中另一个之前放上相同的符号，显然，最后和的绝对值不小于

$$19+20-\underbrace{1-1-\cdots-1}_{9}=30.$$

现在要证明，如果第一个人每一次在剩下数中的最大数之前放上与此时已有之和的符号相反的符号（如果和等于0，则放上

正号），那么他可以不允许第二个人得到大于30的和.

我们来考察某一次加符号的情形. 设使和改变符号的那一次为第k次（其中包括使和等于0的那次）. 在前$k-1$次中显然利用了数20，19，18，…，$20-(k-1)$，所以绝对值最大的和可能在第k次之后得到，此时$20-(k-1)+20-k=41-2k$. 在以后的$10-k$次中每加一次符号，和数至少减1，这是因为第一个人每次都是从和的绝对值中减去剩下数中最大的m，而第二个人不可能把大于$m-1$的数加到和上. 于是最后的和数将不大于$41-2k-(10-k)=31-k\leqslant 30$.

全苏数学奥林匹克竞赛

第　一　届

84．1）如果直角三角形的角B所对的直角边等于（小于）斜边的一半，那么角B等于（或小于）30°.

把这些结果用于三角形BMK和BML（图50—1，$MK\perp BC$），我们得到$\angle MBC=30°$，因为$BM=AH=2MK$；$\angle MBA<30°$，因为$BM=AH\geqslant EC=2ML$，所以$\angle B=\angle MBC+\angle MBA<60°$.

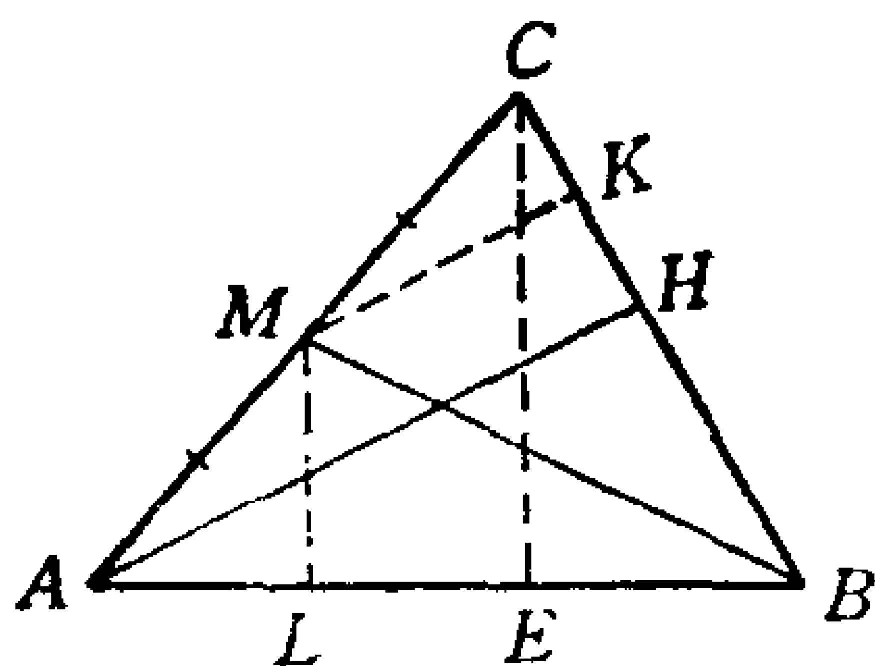


图50—1

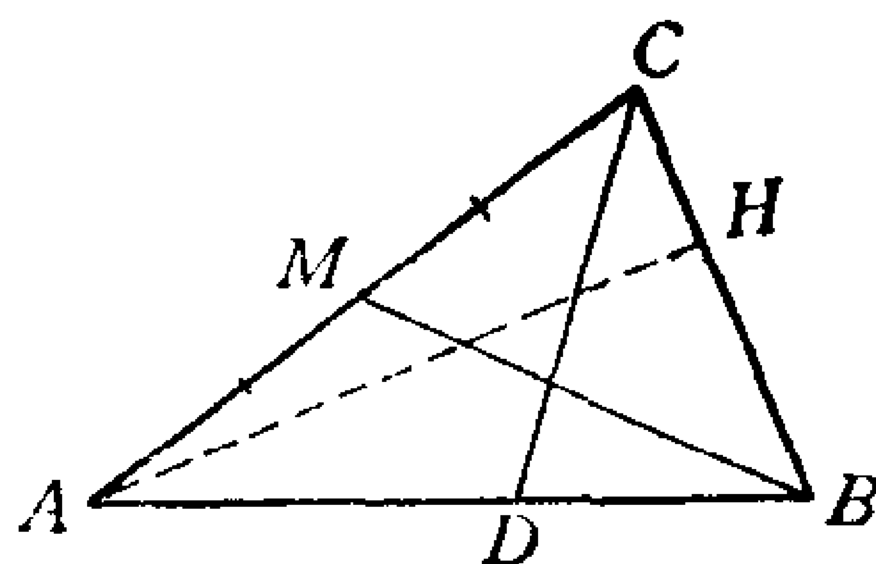


图50—2

顺便指出，本题中"锐角三角形"的条件是必要的，没有这个条件此题的结论不成立.

2）由1）得到$\angle B\leqslant 60°$，因此只要证明AC边不小于其它的边即可；那么$\angle A\leqslant\angle B\leqslant 60°$，$\angle C\leqslant\angle B\leqslant 60°$（三角形中大边对大角），而由这些不等式立即得到$\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

为了证明我们指出，BM是最短的中线，因为BC边的中线

不小于高$AH=BM$，而AB边的中线不小于角平分线CD（要知道角平分线把AB边分成$AC:BC$的两段，见图50—2）。然而在任何三角形中较短的边对应较长的中线，因此AC边不小于其余的边。

85. 1）如果两个数a、b之和由一些数字9组成，那么在把这些数相加时不可能往下一位进1. 因此$S(a+b)=S(a)+S(b)$，其中$S(x)$表示数x的数字和，同时如果$S(a)=S(b)$，那么$S(a+b)$是偶数且不可能等于9.1967.

2）如果数a的末位数字不等于0，则它与数b的末位数字之和等于10，而其余9个数位上的数字和都等于9，由此得出$2S(a)=9\cdot9+10=91$，这是不可能的.

86. 1）我们这么作直线l，使由这条直线所分成的每一个半平面中各有两个已知点. 显然（图51），位于每一个半平面中的两座探照灯能够照亮另一个半平面.

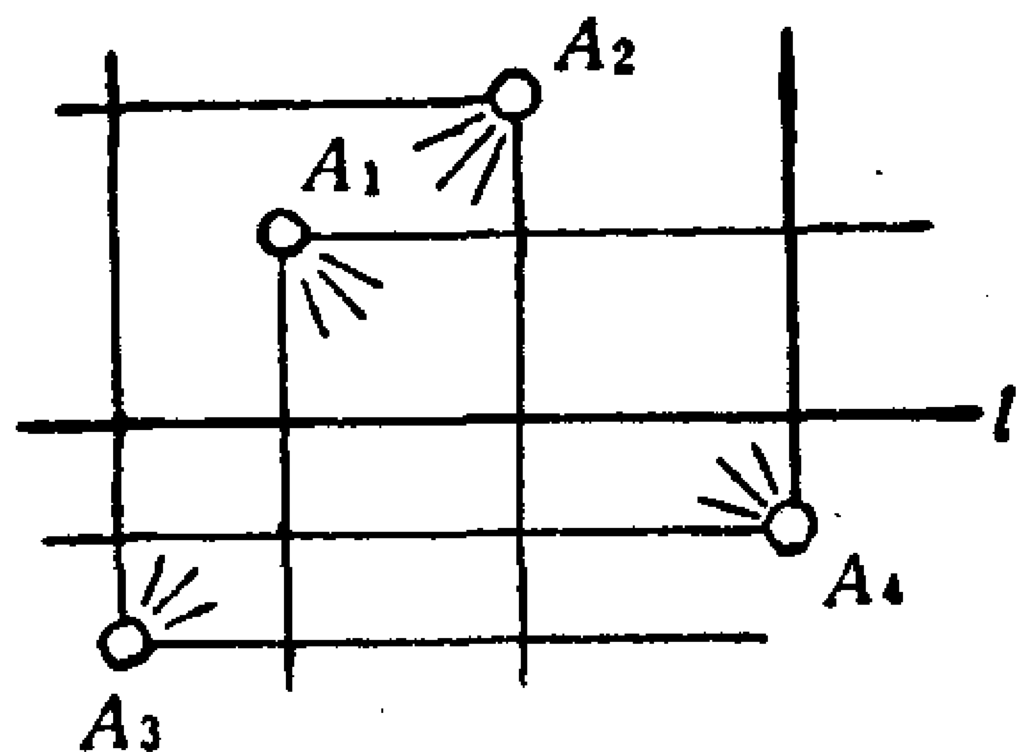


图51

2）我们作一个平面使已知点中的4个点在它们一侧，而其余的4个点在另一侧，利用1）不难证明，位于一个半空间中的4个点之上的探照灯可以照亮另一个半空间.

对这个问题可以做如下的推广[70]：任意n个已知角α_1、α_2、…、α_n，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=360°$，可以把它们分放到$n$个已知点上去，使它们能覆盖整个平面.

87. 1）答案：不能，我们指出，0、1、2、8、9中的任意两个数字不可能相邻，就是说，它们应该每隔一个地放在圆周上，可是数字7不可能在其余5个位置的任何一个上，因为上面所写数字中与它相邻的只能是2.

2）答案：不能、推理类似于1）．数1、2、3、11、12、13中的任何两个不可能相邻；这些数中只有1能与4相邻，13能与10相邻，那么10和4应该相邻，然而这与条件矛盾．

注　我们愿意指出，对于14个数（或对于任意的$n\geqslant 14$）那样的摆法是可能的：

—12—9—13—10—14—11—7—4—1—5—2—6—3—8—

88．数5^{1000}的末位数字是5．设在这个数的十进制记数法中，从末位数起第k位上是0，而其后的所有数字都异于0，把$5^{1000}\cdot 10^{k-1}$与5^{1000}相加后得到能被5^{1000}整除的数，这个数的后k个数字都不等于0，重复这个过程，可以得到后1000个数字都不等于0的数．现在，除后1000个数字外，去掉这个数中其余所有的数字，这样所得到的数显然也能被5^{1000}整除．

89．答案：$(0,-1)$，$(-1,-1)$，$(0,0)$，$(-1,0)$，$(5,2)$，$(-6,2)$．

把方程两边同乘以4而且两边都加1后得到$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y)$．

如果y是异于-1、0、1和2的整数，那么$3y^2+4y+1>0$，$y^2-2y>0$，同时

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2.$$

这些不等式意味着$(2x+1)^2$在两个相邻的平方数之间，而当x是整数时这是不可能的．在等式中取$y=-1$，$y=0$，$y=1$，$y=2$就求得所要的答案．

90．答案：2952．

我们要证明满足要求的数列的长度（项数）不超过$d_n=[3(n+1)/2]$，这个数列的最大项是第2项且等于n，同时数列$n-1$，n，1，…，1，1的长度恰好等于d_n．

用数学归纳法来证明．

当$n\leqslant 4$时，结论容易用枚举法来验证（$d_1=2$，$d_2=3$，

$d_3=6$, $d_4=7$）。

我们从a, n, $n-a$, a, …（$a<n$）开始估计数列的最大长度，并认为对于较小的n结论已证．当$1\leqslant a<n/2$时，数列的长度不超过$d_{n-a}+1$，因为拿走首项a之后，可以代之以$n-2a$, $n-a$, …；当$n/2\leqslant a<n-1$时，它的长度不超过d_a+2，因为只要拿走前两项即可．于是剩下只要验证，对于那样的a，不等式$d_{n-a+1}\leqslant d_n$与$d_a+2\leqslant d_n$相应成立．当$a=n-1$时，即对于数列$n-1$, n, 1, $n-1$, $n-2$, 1, $n-3$, …, 1, 1，只要拿走前三项且把随后的两项掉换位置即可，剩下只要验证等式$d_{n-3}+3=d_n$．

当$n=1967$时，从一般的结果得到答案：

$d_{1967}=[3.1968/2]=2952$.

91．如果“王”沿着棋盘的对角线从左下角往右上角走，那么在某一步上它必定受到白车的进攻．

对于证明只要指出下面这一点即可：在“王”走了一步之后，所有的白车应该在第3条水平线之上、第3条垂直线之右（接着下一步王就能受到白车的进攻）．

同样在“王”到达右上角的那一步之前，所有白车应该在第998条水平线以下和第998条垂直线以左．

“王”在走最后一步之前应该共走997步，同时在“王”运动时每一个车应该走两步（更换它最初所在的水平线和垂直线），但是有499个车，为此车应当要走$2\cdot499=998>997$步．

92．答案：$S=1$．

设K、L、N分别是菱形在正方形的边AB、BC、AD上的顶点（图52—1），注意到KB的长度等于从点M到直线AD的距离．因此如果固定点K，那么点M的可能位置填满了平行AD边的某条线段M_1M_2．点M的较低的位置M_1对应于$N_1=A$的情形，而点M的较高位置M_2对应于$L_2=C$的情形．

为了确定与点K的位置有关的点M_1和M_2的位置，我们作一

坐标系，如图52—2所示。

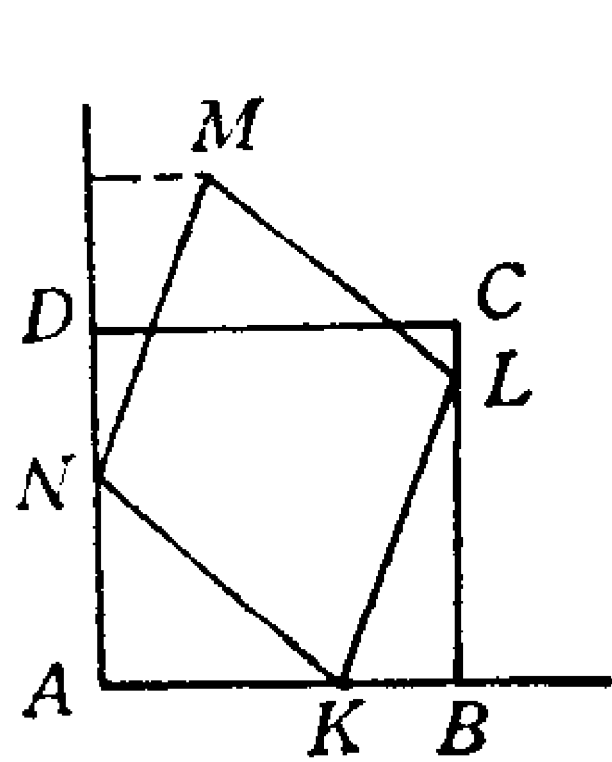


图52—1

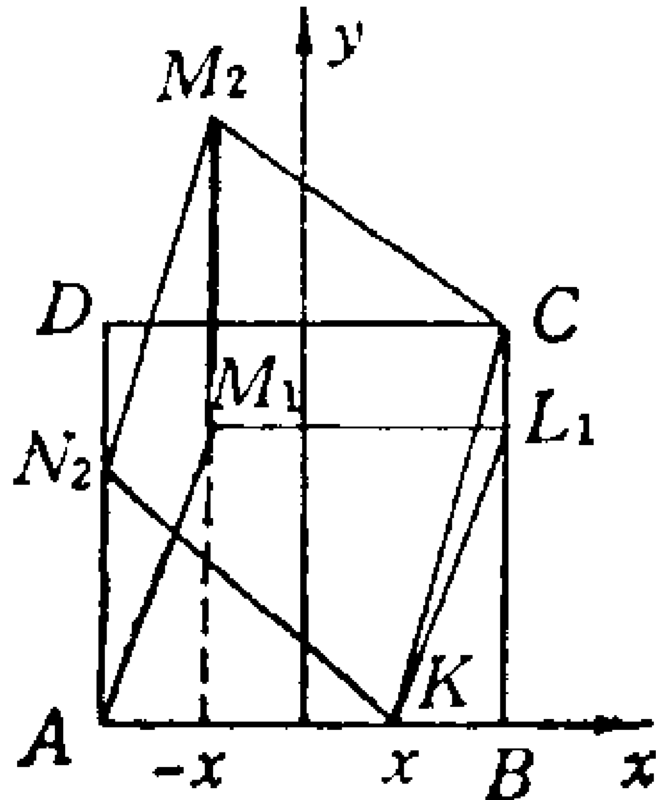


图52—2

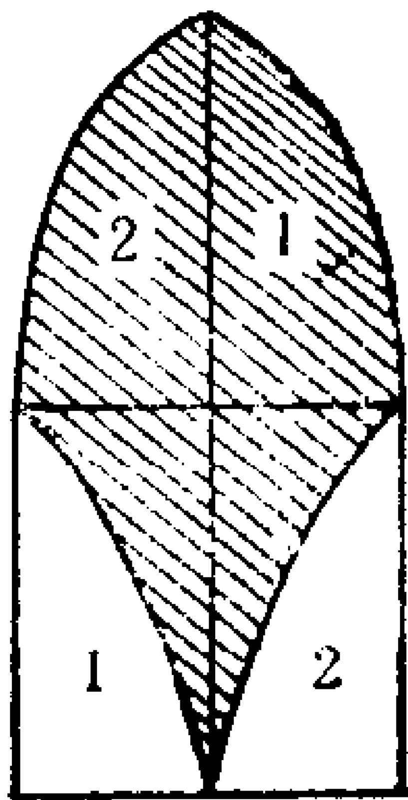


图52—3

简单的计算表明，如果点K的横坐标等于$x>0$，那么$M_1=(-x, \sqrt{2x})$，$M_2=(-x, \sqrt{1-2x}+1)$。再利用点M的集合关于Oy轴的对称性，我们得到所求集合是用斜线标出的图形，见图51－3。在图中用数字1、2表示的图形的面积相等，因此计算面积时不需要进行积分。

93. 首先我们注意到，数k和10互质。确实，存在能被k整除且首位数字为1的数，把这个数的数字按相反次序写成的数也能被k整除且末位数字为1。

现在我们取从数字500开始的且能被k整除的数$500abc\cdots z$（a、b、c、…、z是这个数的数字），那么能被k整除的数还有：

1）$z\cdots cba005$

2）和

$$\begin{array}{r} z\cdots cba00500\cdots 0 \\ 500abc\cdots z \\ \hline z\cdots cba01000abc\cdots z \end{array}$$

3）上述和的反序数$z\cdots ba00010ab\cdots z$

4）差

$$\begin{array}{r} z\cdots ba01000abc\cdots z \\ z\cdots ba00010abc\cdots z \\ \hline 990000\cdots 0 \end{array}$$

由此得出99能被k整除。

第 二 届

94．设a_1、a_2、…、a_8分别为8边形的每条边的长度（图53）．从多边形的每个角都相等立刻得出它的任意两条对边互相平行．延长两组对边a_1和a_5、a_3和a_7，我们得到一矩形（去掉这个矩形的4个角就是已知的8边形）．

由矩形的对边相等有

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}}+a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}=\frac{a_6}{\sqrt{2}}+a_5+\frac{a_4}{\sqrt{2}}，\text{或者}$$

$$a_5-a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(a_8+a_2-a_6-a_4).$$

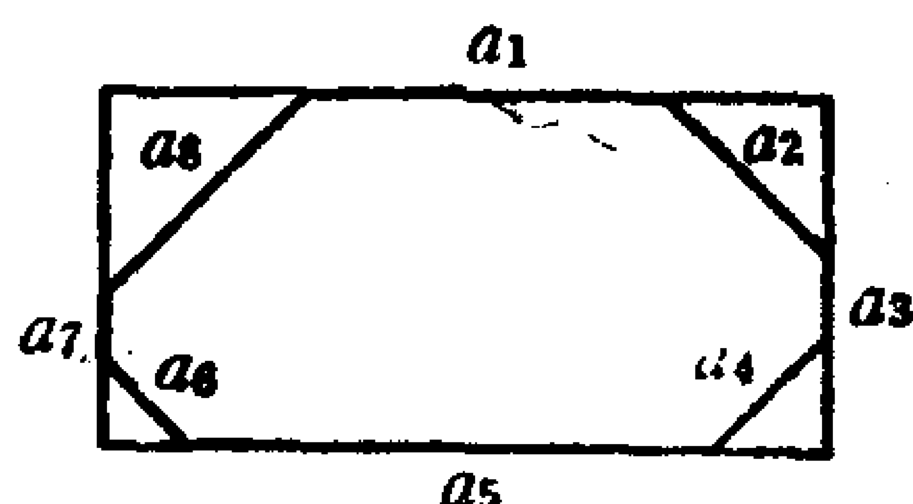


图53

因为a_i是整数，而$\sqrt{2}/2$是无理数，那么$a_5=a_1$，同样也可证明其余的每组对边也相等．

95．答案：$17^{14}>31^{11}$．这可由下面的不等式得到：$17^{14}>16^{14}=2^{56}>2^{55}=32^{11}>31^{11}$．

96．答案：800或者799．

我们把格线的一个方向称为水平方向，另一个方向称为垂直方向．不通过结点、不与格线相切的且直径等于200的圆周与200条水平线和200条垂直线相交．同时与每一条直线都是相交两次，于是交点共有800个，这800个点把圆周分成800个部分，每一个部分都在一个方格的内部，因此最多有800个格子与圆周相交．

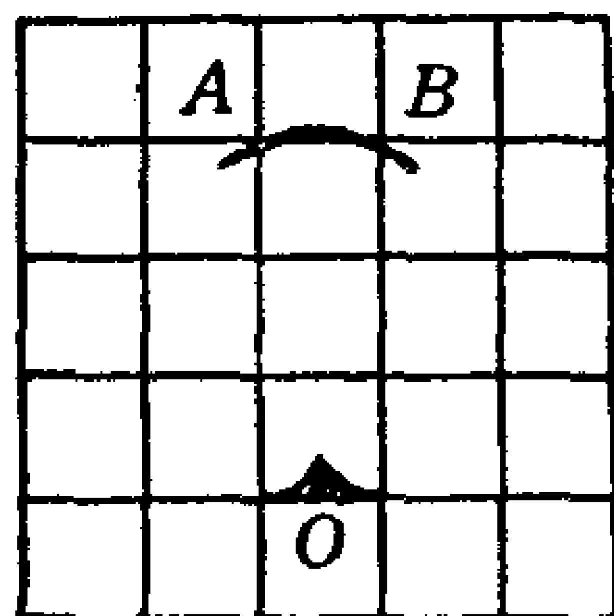


图54

但是可能发生某两个部分属于同一格子的情形，即圆周两次与某一个格子相交（图54）．我们要证明那样的“奇

格”不多于1个.

我们来考察与格子的某一条边AB两次相交的、直径为200的圆周的圆心可能在什么地方. 从圆周的圆心O到点A、B的距离都大于100,而到直线AB的距离则小于100. 因此点O在半径为100、圆心分别是A、B的两个圆周的外部,且在分别过A、B两点的两条垂直线之间,还在以AB为水平轴的、宽度等于200的带形内部. 一切那样的点O填满了两个曲边三角形的内部(在图54中用斜线标出了其中的一个).

显然对于不同的线段AB,那样的集合没有公共点,因此奇格不多于1个.

97. 我们首先证明可以挑选出一组大学生,在这组中正好两个人懂一种语言.

我们用每一个大学生所掌握的语言名称的第一个字母来表示这个大学生. 于是大学生a懂英语,但不懂其它语言;大学生$u\phi$懂西班牙语和法语,但不懂英语;大学生$au\phi$懂三种语言.

设Na、Nu、$N\phi$、Nau、$Na\phi$、$Nu\phi$、$Nau\phi$为每种类型的大学生数量.

如果$Nau\neq0$, $Na\phi\neq0$, 且$Nu\phi\neq0$, 那么我们就挑选(au, $a\phi$, $u\phi$)这一组.

如果一个数,比如$Nau=0$, $Na\phi$不等于0,且$Nu\phi$也不等于0,那么$Na\neq0$, $Nu\neq0$, 因而所求的组为($a\phi$, $u\phi$, a, u).

如果$Nau=Na\phi=0$, $Nu\phi\neq0$, 且$Nau\phi\neq0$, 那么就选($au\phi$, $u\phi$, a)这一组;如果$Nau\phi=0$, $Nu\phi\geqslant2$, 则选组($u\phi$, $u\phi$, a, a);如果$Nu\phi=1$, 那么就选($u\phi$, a, a, u, ϕ)这一组.

如果$Nau=Na\phi=Nu\phi=0$,则可能从下面3个组中选一个:($au\phi$, $au\phi$), (a, u, ϕ, a, u, ϕ), ($au\phi$, a, u, ϕ).

在每一种语言正好有两个人掌握的组中挑选5次,这样就得了每种语言有10个人掌握的第1组. 然后再挑选第2组,等等.

注　在一般情形下，如果在某个组中有n个人懂三种语言中的一种，对么对于任意偶数$p<n$可以挑选出一组学生，在这组中每种语言有p个人懂．（p的奇偶性在这里是重要的．）

98．在解题时只要利用下列恒等式即可：

$$\frac{2k}{x^2-k^2}=\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x+k},$$

$$和\frac{11}{(x-11+k)(x+k)}=\frac{1}{x-11+k}-\frac{1}{x+k}.$$

99．答案：$n=9$．

设a_n为边长，而D_n和d_n分别是正n边形的最长的对角线和最短的对角线之长．当$n=4$及$n=5$时所有对角线的长度都相等．当$n=6$，$n=7$时，$D_n-d_n<a_n$．当$n=8$时（图55—1），从最短的对角线BD的端点对最长的对角线AE作垂线BK和DL．

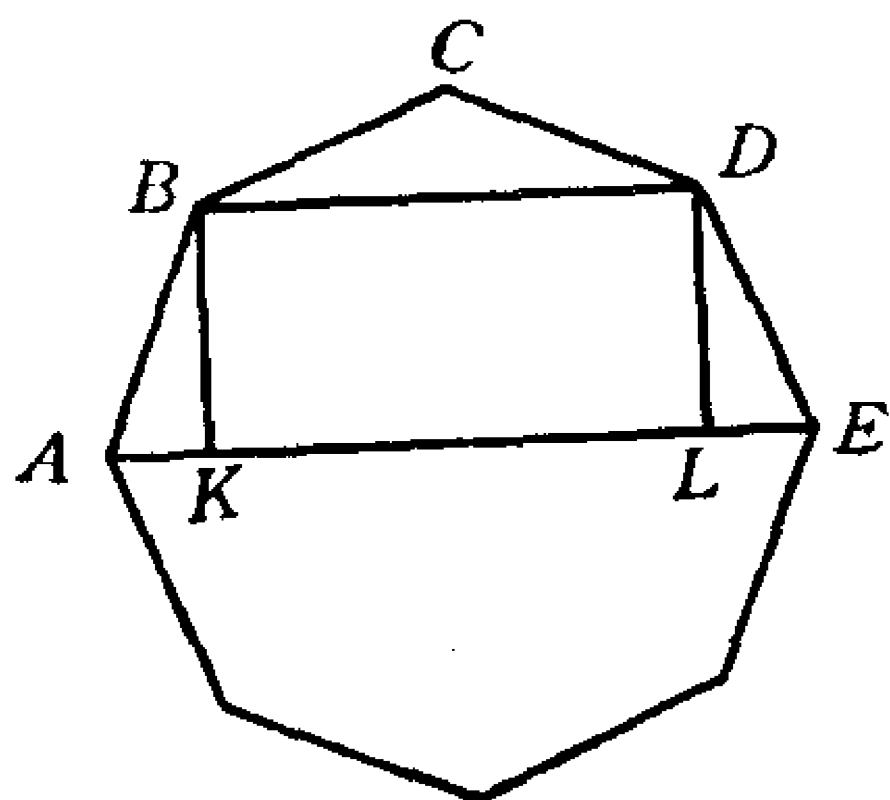


图55—1

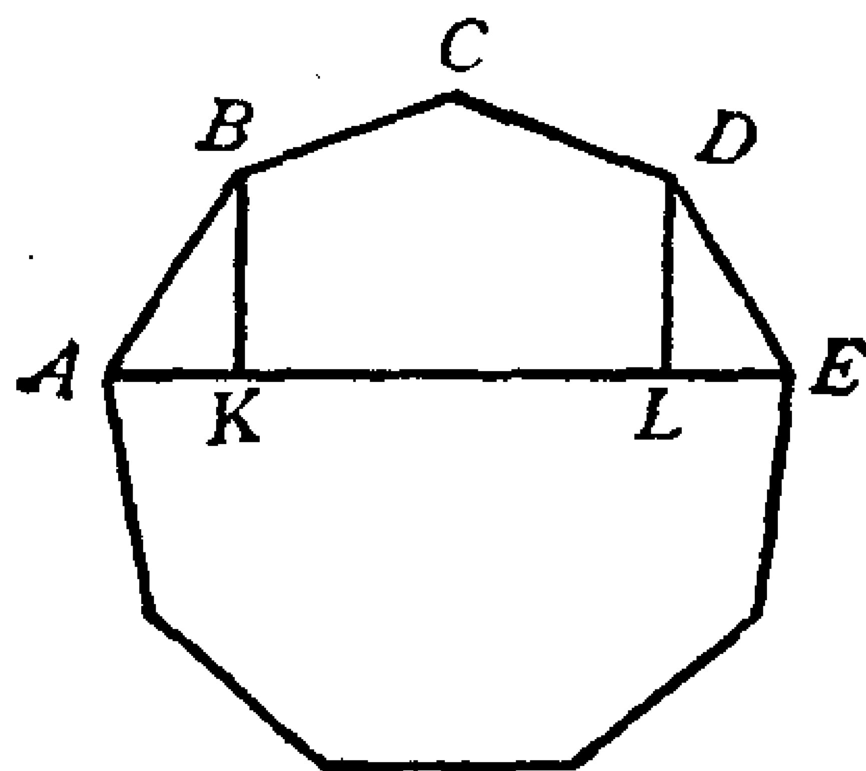


图55—2

容易看到，$\angle ABK=22.5°<30°$．因此$AB=a_8>2AK=D_8-d_8$，当$n=9$时（图55—2），类似可得$\angle ABK=30°$，因此$AB=a_9=2AK=D_9-d_9$．

下面我们将认为n边形内接于半径为1的圆周，当$n>9$时，显然$D_n\geqslant D_9$、$d_n<d_9$，$a_n<a_9$．因此$D_n-d_n>D_9-d_9=a_9>a_n$．

100．我们要证明双边估计：$14<a_{100}<18$．当$k>1$时，有

$$a_k^2=a_{k-1}^2+2+\frac{1}{a_k^2-1}，同时a_k>1.$$

因此 $a_{k-1}^2+2< a_k^2< a_{k-1}^2+3$。

把这些不等式对于一切k相加，$1\leqslant k\leqslant n$，我们得到（注意到$a_1=1$）

$$2n-1<a_n^2<3n-2,$$

由此$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}$。当$n=100$时就得到所求的不等式$14<a_{100}<18$。

注 有趣的是证明数列$a_n/\sqrt{n}$收敛了一极限，并求出这个极限。

101．我们这样来平移$\triangle A'B'C'$，使点O'变成点O，所得到的三角形的顶点仍用A'、B'、C'表示。

因为$\angle A'OB=\angle A_1OB_1$，并由条件$OA':OB'=OB_1:OA_1$，那么$\triangle A_1OB_1\backsim\triangle B'OA'$，$\angle OA_1B_1=\angle OB'A'$和$\angle OB_1A_1=\angle OA'B'$。

因为四边形OA_1CB_1有直径为OC的外接圆周，那么$\angle B_1CO=\angle OA_1B_1$，$\angle A_1CO=\angle OB_1A_1$。所以$\triangle A_1OC\backsim\triangle C_1'OA'$，$\triangle BOC\backsim\triangle C_1'OB_1$。由此得出线段$OC'$在直线$OC$上且$OC\cdot O'C_1'=OA\cdot O'A_1'=OB_1\cdot O'B_1'$。

三角形$B'OC'$和三角形$C'OA'$可进行类似的研究。

102．我们用对n的数学归纳法来进行证明。当$n=1$时，结论显然成立。假设$n=k$时结论成立。

设$a<(n+1)!$，我们用$n+1$带余数除a得到$a=d(n+1)+r$，其中$d\leqslant n!$，$r<n+1$。

由归纳假设$d=d_1+d_2+\cdots+d_l$，这里一切d_i是$n!$的不同的因数，且$l\leqslant n$。那么$a=d_1(n+1)+\cdots+d_l(n+1)+r$，在这个和中的加数不多于$n+1$个，且每一个加数都是$(n+1)!$的因数而且它们都不相同。

103．我们用把点D变为点B的平行移动的方法把三角形

ADE变成三角形KBL，这里$KL \parallel AC$，此外，$KB = LB$(图56)。

如果$\angle KAL = \alpha$，那么$\angle KLA = \alpha$；$\angle BKL = 2\alpha$；$\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$；此外，由两边及其夹角相等，$\triangle ACL \cong \triangle BKL$；$\angle ALC = \angle KLB = 2\alpha$；$\alpha = \pi/5$，且$LC = AK = BD$，即线段$BD$的长度等于半径为$R = AC$的圆内接正十边形的边长。

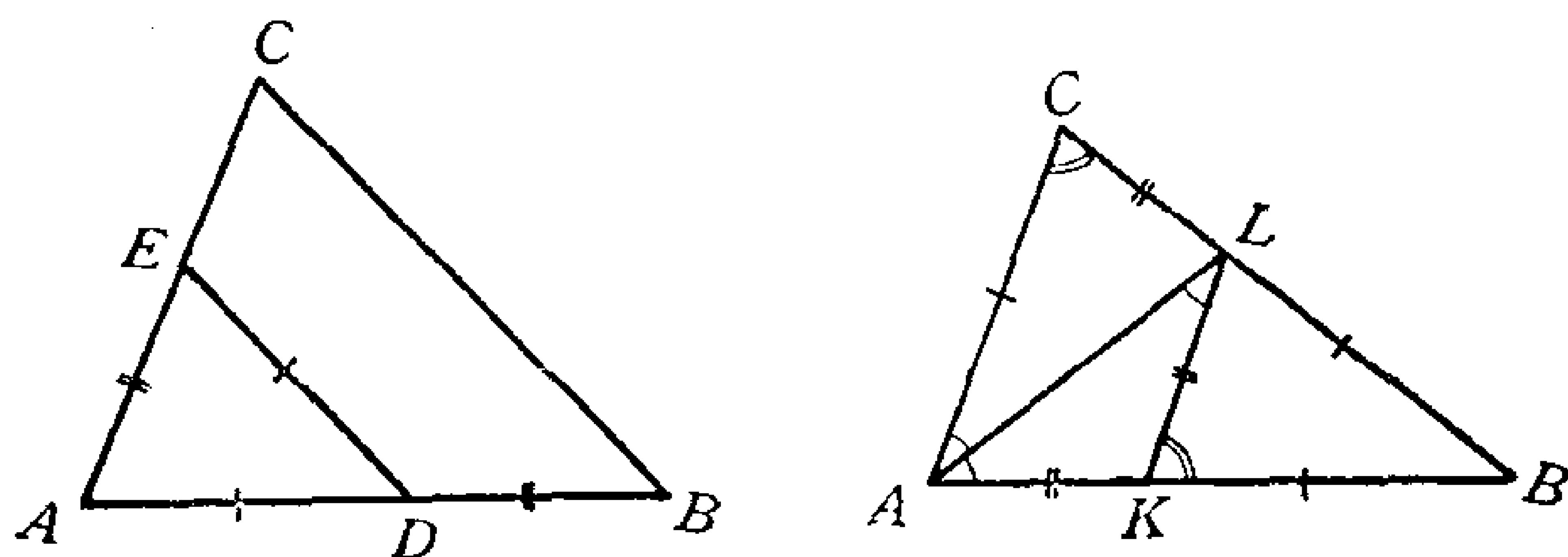


图56

104. 从点A作平面BCD的垂线AH，而从点H分别作直线BC、BD、CD的垂线HK、HL和HM。每一个棱锥$ABKL$、$ACKM$、$ADML$都由对应的球所覆盖。

105. 1）容易看到，与正方形的边或者对角线平行的每一条直线都与图57中用斜线标出的8个格子中的偶数个相交，因此这些格子中负号个数的奇偶性在所指出的运算中不变化(索13)。

2）在8×8的棋盘上可以画出4×4的正方形，在这个正方形中负号将如同在1）中那样放着，于是这就归结为1）。

106. 三角形由它的3条中线分成6个三角形，它们的面积彼此相等。

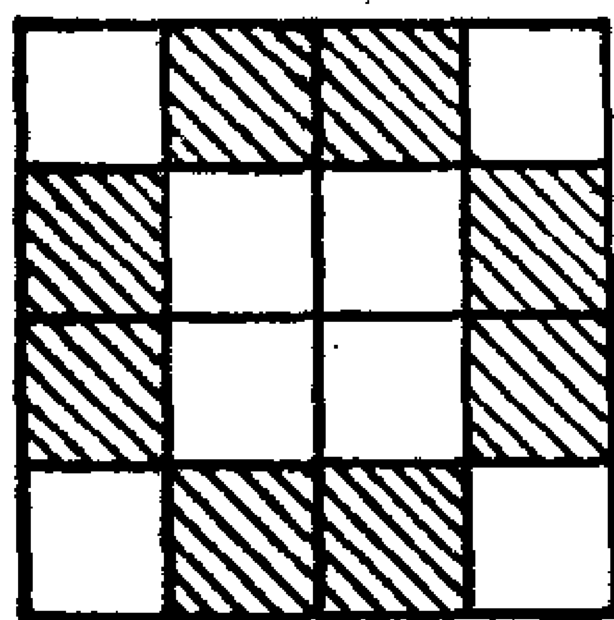


图57

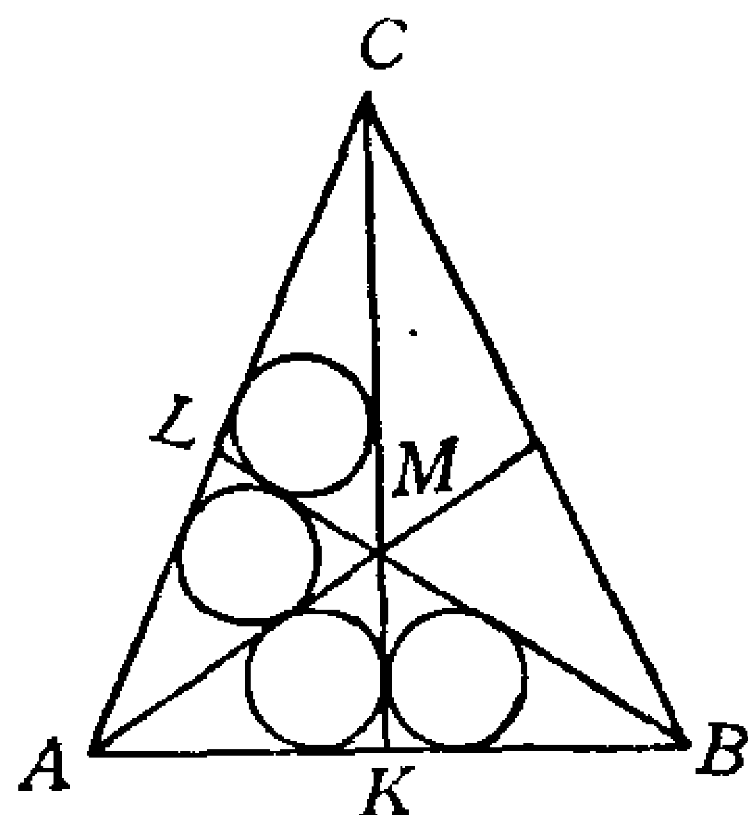


图58

由于内切圆的半径相等及公式$S=pr$得出，这6个三角形中有4个周长相等的三角形。因为其中的两个三角形与三角形ABC的一条边，比如说AB边相接邻（图58），那么$AM=MB$，因此MK是$\triangle AMB$的中线和高，且$AC=BC$。

如果三角形ALM和AKM的两个内切圆的半径相等，那么这两个三角形全等(即有相等的面积、相同的底边和周长的三角形)，同时$AL=AK$，即$AC=AB$，因而三角形ABC是等边三角形。

如果三角形CLM和KMB的周长相等，那么利用从圆外一个点向圆所作的两条切线长相等，我们得到$CL+LM+CM=2\cdot CL+2x=2BK+2x$（$x$为从点$M$到对应圆周的切点的距离）。由此得出$AC=AB$。

107。设方程$x^2+x+1=py$只对有限个质数p_1、p_2、…、p_m有整数解（x，y）。

设$p=p_1\cdot p_2\cdot\cdots p_m$，那么数$p^2+p+1$不能被$p_1$、$p_2$、…、$p_m$中任何一个数整除，所以它有与$p_1$、$p_2$、…、$p_m$中任何数不相同的质因数$q$，因此方程$x^2+x+1=qy$有整数解（$p$，（$p^2+p+1$）$/q$）。矛盾。

108。答案：C_1的可能最大值等于24。

如果一个花样滑冰运动员得了9个第一名，则$C_1=9$，如果两个运动员得了9个第一名，那么其中之一至少得了5个第一名，而他所得的其余4个名次都不高于第四名。因此$C_1\leqslant 5\cdot 1+4\cdot 4=21$。

如果三个运动员得了9个第一名，那么因为他们每个人所得的其余名次都不高于第四名，因而这三个运动员所得的名次之和不超过$1\cdot 9+3\cdot 9+4\cdot 9=72$，所以$C_1\leqslant 24$。如果四个运动员得了9个第一名，那么他们的名次总和不超过90。因而他们之中每一个人所得的名次之和不超过22。而五个或更多的运动员得到9个第一名的情形是不可能的（因为他们每个人不能都得到第一名至第四名）。

于是$C_1 \leqslant 24$。下面举一个$C_1 = 24$的例子。

如果裁判们这么打分，使三个最好的运动员每人得的名次为1，1，1，3，3，3，4，4，4，而在他们之后的三个运动员每人得的名次为2，2，2，5，5，5，6，6，6，其余人的名次是任意的，这里$C_1 = 24$。

109. 对于任意m（$1 \leqslant m \leqslant n$），在$m$个"数对"（$a_k$，$b_k$）中（$1 \leqslant k \leqslant m$），至少有$\frac{m}{2}$个数对使不等式$a_k \geqslant b_k$或者$b_k \geqslant a_k$成立。

例如，假设在至少$\frac{m}{2}$个"数对"中有不等式$b_k \geqslant a_k$。如果b_i为这些b_k中的最大数，则$b_i \leqslant 2/m$。因此$a_i + b_i \leqslant 2b_i \leqslant 4/m$，而因为$i \leqslant m$，所以$a_m + b_m \leqslant a_i + b_i \leqslant 4/m$。

110. 此题可以用对学生人数n用数学归纳法来证明。然而我们这里给出另一种解法，它是由下面这个几乎是显然的事实得到的：设（x_1，x_2，…，x_k）为由$+1$与-1所组成的一切可能的数组，那么2^k个乘积$x_1 x_2 \cdots x_k$之和等于0（要证明这个事实，只须把k个等式$1 + (-1) = 0$连乘并在左边用一切方法进行逐项相乘即可）。我们将认为学生有1至n的号码，对于号码为$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$（这里$k < n$）的每一张清单，我们用$a_{i_1 i_2 \cdots i_k}$表示指出了这张清单的那些砝码的重量之和，同时在一个天平盘子（起初较重的那个盘子）上的砝码有正号，在另一个盘子里有负号，那么我们所需要的结论在于：对于形如

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \cdots + a_{n-1,n} x_{n-1} x_n + a_{123} x_1 x_2 x_3 + \cdots + a_{n-2,n-1,n} x_{n-2} x_{n-1} x_n + a_{1,2,\cdots n} x_1 x_2 \cdots x_n$且其系数之和为正的多项式，总存在由$+1$和$-1$构成的一组数$x_1$，$x_2$，…，$x_n$使$f$（$x_1$，$x_2$，…，$x_n$）的值为负（如果对于重新摆放了自己砝码的、号码为$i$的学生，$x_i = -1$，对于其余学生，$x_i = 1$，那么$f$（$x_1$，$x_2$，…，$x_n$）表示天平两个

盘子中的重量之差）．剩下的是要指出$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$关于所有数组的值的和（甚至它的每一个单项式的值的和）等于0．因为$f(1, 1, \cdots, 1)>0$，那么应该找到一组数使f的值为负．

111．答案：至少需要$(m-1)(n-1)$个警察．

如果警察按照所要求的方式进行分配，那么整个马路网被分成k个不包含闭合线路（环线）的小块，否则存在一条环线，当公共汽车通过这条环线时而不被任何一个警察所发现．

如果马路网的一个小块包含有p个十字路口，那么在其中正好有$p-1$条马路段（见第8题）．因为共有m、n个十字路口，那么没有警察的马路段的数目等于$mn-k$．马路段的总数为$2mn-m-n$．那么站有警察的马路段的数目等于

$$mn-m-n+k \geqslant (m-1)(n-1).$$

分配$(m-1)(n-1)$个警察的例子如图59所示．

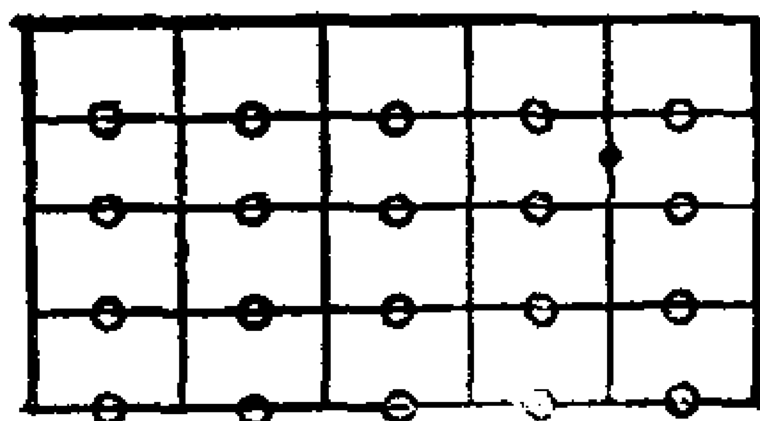


图59

112．设L、K是中心为O的内切圆直径的两端点，D为线段AC的中点，E为AC与直线BL的交点．只要证明$ED=DK$（那么DO在$\triangle EBK$的中位线上），即证$AE=KC$即可．

我们指出，在作中心为B，把三角形ABC的内切圆变为与AC及BA、BC边的延长线相切的旁切圆的同位相似时，点L变为点E，即E是旁切圆与AC的切点．因为从圆外一点向圆周所作的两条切线的长相等，所以$AK+AE$与$CK+CE$都等于直线BA和BC落在两个切点之间的线段长，因此$AK+AE=CK+CE$且$AE=KC$．

113．我们把$a_1=0$，$|a_2|=|a_1+1|$，…，$|a_{n+1}|=|a_n+1|$中的每一个等式都平方，再相加，化简后得

$$a_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n \geqslant 0$$

由此得　　$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant -n/2$．

用其它的解法（数学归纳法）也能得到结果．我们只指出，去掉平均值为$-\frac{1}{2}$的相邻两项$a_n\geqslant 0$，$a_{n+1}=-a_n-1$能得到满足要求的数列．

注　在此题中，对n个数之和的估计（$-n/2$）是精确的，以数-1或0（当n为奇数时）为最后一个数的任何数组可作为一个例子．

114．设$\angle ABC=P$，$\angle ABD=\beta_1$；$\angle DBC=\beta_2$．把正弦定理用到三角形AOB及三角形BOC上，得

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AO}{AB}\cdot\frac{BC}{OC}\cdot\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}.$$

因为AB和BC是有理数，那么只须证明两个正弦值之比也是有理数即可．

由余弦定理以及边长和对角线长都是有理数得出，数$\cos\beta$、$\cos\beta_1$和$\cos\beta_2$为有理数（例如$\cos\beta=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$），而且$\sin\beta_1\sin\beta_2$（因为$\cos\beta=\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2$），$\sin^2\beta_2=1-\cos^2\beta_2$，以及它们的比$\sin\beta_1\sin\beta_2$是有理数．

第　三　届

115．我们在直线BC上选取点C_1，使ABC_1E为平行四边形．那么三角形ABE、BEC_1及BEC的周长相等．由此得出，点C和C_1重合。因此$BC=AE$．类似可证明$BC=ED$．

116．设v为狼的最大速度。我们过狼所在的那一点作两条平行于正方形对角线的直线，它们与正方形的边界交于点C_1、C_2、C_3、C_4．

因为每个点C_1、C_2、C_3和C_4的移动速度不大于$\sqrt{2}v<\frac{3}{2}v$，

因而任何时刻狗都能在这四个点上，所以不可能放走狼。

117. 设$abcd$为最后的四个数字。在数列中一定有连续的5个数字$abcd0$（否则可以添加0并保持性质1），但这又与性质2）矛盾）以及$abcd1$。所以四数组$abcd$在数列中出现三次。而因为0或1都在$abcd$之前至多出现1次，因此这三个$abcd$中有一个，在它之前没有任何数字。

注　对于任意n（特别，可取$n=5$），可以把2^n个0和1放在圆上，使任何由0和1组成的长度为n的“单词”正好出现一次（沿逆时针方向绕行时）。在由任意$k\geqslant 2$个字母组成的字母中，类似的事实也成立（那时长度为n的“词”有k^n个）。

118. 把第一个不等式和第二个不等式连乘，我们得$(a+b)^2<ab+cd$，但是$(a+b)^2\geqslant 4ab$，所以$ab+cd\geqslant 4ab$，即$cd\geqslant 3ab$.

把第二个不等式和第三个不等式连乘，我们得$ab(ab+cd)>(a+b)^2cd\geqslant 4abcd$，由此有$ab+cd>4cd$，即$ab>3cd$.

于是同时有$ab>3cd$及$cd>3ab$，这是不可能的。

119. 答案：$a=5$.

设$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中$0<x_1<1$及$0<x_2<1$，$a$、$b$、$c$是整数，$a>0$.

那么$f(0)$和$f(1)$为正整数，因此$f(0)\cdot f(1)\geqslant 1$，即$a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\geqslant 1$.

我们现在指出，总有$x(1-x)\leqslant 1/4$，同时仅当$x=1/2$时等号成立。因为数x_1和x_2不同，而$x_1(1-x_1)$与$x_2(1-x_2)$的值大于0，那么$x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)<1/16$.

所以$a^2>16$，即$a>4$.

当$a=5$时，我们得到二次方程$5x^2-5x+1=0$，它有两个属于区间$(0,1)$的不同的根。

120. 可用数学归纳法来证明。

当$n=1$时，$\frac{1}{1\cdot 1}=1$命题成立。在由$n-1$变到n时我们应该去

掉形式为$\frac{1}{pq}$的一切分数，其中p和q互质，且$p<q$，$p+q=n$，并且添加形式为$\frac{1}{pn}$的所有分数，其中$p<n$，p和q互质。

设$\frac{1}{pq}$为所去掉的一个分数。

因为$\frac{1}{pq}=\frac{1}{p(n-p)}=\frac{1}{pn}+\frac{1}{(n-p)n}$，所以从和中去掉$\frac{1}{pq}$，可以用增加两个分数$\frac{1}{pn}$、$\frac{1}{(n-p)n}$来补偿，这两个新分数满足要求。

于是在从$n-1$到n时，和没有改变。

121. 从已知的一组点中选择彼此间距离最大的两个点，不仿假设这两个点为A，B。

我们要证明，每一个角XAY（以及角XBY）都小于120°，其中X、Y是任意两个已知点。因为在三角形AXB和AYB中AB边最长，因此$\angle AXB>120°$，$\angle AYB>120°$。故而$\angle XAB<60°$，$\angle YAB<60°$。又因为三面角的一个平面角小于其余两个平面角之和，所以$\angle XAY<\angle XAB+\angle YAB<120°$。

于是编号应该从点A开始而结束于点B。我们指出，从已知点到点A的距离不相等。事实上，如果$AX=AY$，那么三角形AXY是等腰三角形且$\angle XAY>120°$，这是不可能的。我们把已知点这样编号，设$A_1=A$，A_2是已知点中离A最近的点，A_3是其余点中离A最近的点，…，A_k是还未编号的离A最近的点，…，$A_n=B$。我们要证明，这样的编号满足此题的要求。

因为当$1<i<k\leqslant n$时，$\angle A_1A_iA_k>120°$，那么只要证明当$1<i<j<k<n$时，$\angle A_iA_jA_k>120°$即可

因为在A_1、A_2、…、A_k中，点A_1和A_k的距离最远，那么就像我们在开始解题时证明的那样，$\angle A_iA_kA_j<120°$。

我们证明，$\angle A_kA_iA_j<120°$。事实上，因为$\angle A_1A_iA_j>120°$，$\angle A_1A_iA_k>120°$，那么若$\angle A_kA_iA_j\geqslant 120°$就会得到顶点在$A_i$的

三角形的平面角之和大于360°.

于是当$1\leqslant i<j<k\leqslant n$时，$\angle A_iA_jA_k>120°$．结论得证．

注　实质上在这个问题中证明了关系“$\angle A_iA_jA_k>120°$”与适用于直线上点的关系“A_j在A_i和A_k之间”具有同样的性质，即这个关系允许在已知集合中引进“序”．这里不能用较小的值代替120°.

122．答案：108，135，180，117．

设x_1、x_2、x_3、x_4为所求的数，S为它们的和，a为它们共同的第一个数字，显然有$100a\leqslant x_i\leqslant 100(a+1)$，($i=1,2,3,4$)．

利用这些不等式，我们得到$x_i+300a\leqslant S<x_i+300(a+1)$，由此有

$$1+\frac{300a}{x_i}\leqslant\frac{S}{x_i}<1+\frac{300(a+1)}{x_i},$$

所以　$$1+\frac{3a}{a+1}<\frac{S}{x_i}<4+\frac{3}{a}.$$

当$a=1$时我们得到$2.5<S/x_i<7$，而当$a\geqslant 2$时，$3<S/x_i<5.5$．剩下只要作枚举法即可．

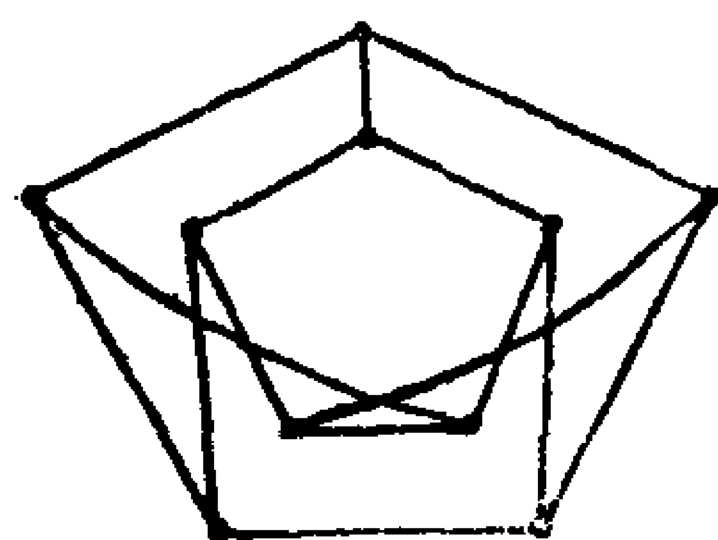
因为四个商S/x_i中的三个是整数且不相同，那么$a\geqslant 2$的情形不可能（在3和5.5之间只有两个整数）．因此$a=1$且整的商数应该在数3，4，5及6中寻找．但是3和6不可能同时是商数，因为从100到199的任何两个三位数之比小于2．只剩两种可能：1）三个商数是3，4，5．2）三个商数是6，5，4．在这两种情形中S被60整除：$S=60k$．在第一情形所求数为$12k$，$15k$，$20k$，$13k$．

所有数的第一个数字仅当$k=9$时才都相同，这就给出了答案．在第二种情形，不管对于什么样的k，$10k$，$12k$，$15k$，$23k$这组数不满足此题要求，因为$23k$与$10k$之比大于2．

123．答案：10个城市．

从任何一个城市A最多可以到达三个城市，而从这三个中的

每一个城市最多可以到达两个城市（不包括A），于是最多共有$1+3+3\times2=10$个城市。


图60

在图60中的例子表明，在一个有十个城市的国家里所需要的航空网是存在的。

注　图60中的图形常被用来作为例子，它称为“彼得森”图。

第　四　届

124. 1）如果K为每条边长都等于a的凸五边形$ABCDE$的最长对角线AD的中点，那么$\angle AKE=\angle EKD=90°$。因为$AC\leqslant AD$，那么$\angle BAC>\angle DAE$，$\angle BAK>\angle KAE$。由此得出，点$A$和$B$在直线$EK$的一侧。这也证明了，点$C$和$D$也在直线$EK$的一侧。由此立即得到，$\angle BKA<90°$及$\angle CKD<90°$。

假设$\angle BKC\geqslant 90°$，那么$BK<a$，$CK<a$。因为$AK<a$，$KD<a$，故有$\angle AKB>60°$，$\angle CKD>60°$（在三角形中大边对大角）。但是这是不可能的，因为$\angle AKB+\angle BKC+\angle CKD=180°$。因此$\angle BKC<90°$。

这样我们就证得了点K满足此题的要求。

2）如果在线段EK的延长线上取非常靠近K的点M，那么$\angle AMB$、$\angle BMC$、$\angle CMD$、$\angle DME$和$\angle EMA$都是锐角，因此点M不可能属于以五边形的边为直径所作的任何半圆。

125. 如果第一个游戏者把-1放在x之前，而且他在第二次填数时，把与第二个人所填数的符号相反的数填到最后一个空上，那么就得到了形如$x^3-ax^2-x+a=(x^2-1)(x-a)$的多项式。这个多项式的根为$-1$，$1$，$a$。它们都是整数。

126. 答案：90场比赛。

假设在任何三个队中有两个已经彼此比赛过的队．我们挑选进行了最少场（k场）比赛的A队，已经与A队比赛过的k个队中的每个队至少进行了k场比赛．没有与A队比赛过的（$19-k$）个队中的每一个队与另外的（$18-k$）个队比赛过，否则存在三个队，其中任何两个队彼此都没有比赛过．于是，所有比赛场次的两倍不小于

$$k^2+k+(19-k)(18-k)=2k^2-36k+18\times19$$
$$=2(k-9)^2+180\geqslant180.$$

进行过90场比赛并且满足题目要求的一个例子是：球队分成两组，每组10个队，在其中的每一组中所有队都彼此比赛过，但任何一个队也没有与另一组的一个队比赛过．

注　如果用点来表示球队，而没有彼此比赛过的球队用线段连接起来，那么得到一张图，在满足此题要求时这是一张没有三角形的图．可以证明在有 n 个顶点的这样的图中，最多有$[n^2/4]$条棱．

在解题过程中所作的推理，类似于在解第156题和第246、3）中“十字架引理”的证明．

127．要证的不等式等价于

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}>1,$$

或者

$$n\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{\pi}{n}\right)>1-\cos\frac{\pi}{n+1},$$

即

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

最后的这个不等式是正确的，因为

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin\frac{2\pi n}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{n+1}>\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

以及

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\geqslant\sin\frac{n\pi}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

（这里我们利用了不等式$n|\sin\alpha|\geqslant|\sin n\alpha|$，可用归纳法证明这个不等式）.

128. 设$a_{i_1}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$，把以$a_{i_1}$做分子的分数分母中最大的数记作$a_{i_2}$，把以$a_{i_2}$做分子的分数分母中最大的数记作$a_{i_3}$，一般地，把以$a_{i_{k-1}}$做分子的分数分母中最大的数记作$a_{i_k}$. 显然，最终能得到

$$a_{i_1}:\ a_{i_{r+1}}=a_{i_1}.$$

如果数码1，2，…，n分放在圆上，那么i_{k+1}和i_k（以及i_r和i_1）将相邻或者隔一个，就是说$r\geqslant n/2$.

所给的和大于

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\cdots+\frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}+\cdots+\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}S.$$

因为算术平均值不小于几何平均值（索8），则有

$$\frac{S}{r}\geqslant\sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\cdot\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}\cdot\ \cdots\cdot\ \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}}=1$$

即S不小于r. 因此所给的和大于$n/4$.

注　可以证明，更强的不等式

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2}\qquad(*)$$

也成立（美国数学家沙皮诺在1954年提出了这样的假设）. 事实上，这是对于奇数$n\leqslant11$和偶数$n\leqslant12$逐步证得的，但已知道对于偶数$n\geqslant14$和奇数$n\geqslant27$结论不成立（最后的反例是对较大的n想

出来的）．若在（.*）中用$r_n \cdot \frac{n}{2}$代替$\frac{n}{2}$，对每一个n，这个精确的估计还没有人作出来．但奥林匹克的优胜者之一的B．Г．德林弗莱继续研究了这个问题，他在1969年取得了优秀的结果*）：他找到了对一切n都适合的最好估计$\gamma \cdot \frac{n}{2}$，这个数$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$——点的纵坐标，在这个点上函数$y=e^{-x}$和$y=\frac{2}{e^{x/2}+e^{x}}$的图象的公切线与$Oy$轴相交，$\gamma \approx 0.989$．

129．先假设题已解出．因为直线CY与直线AX垂直，那么$CY /\!/ BX$．设K是线段AB与线段XY的交点，显然$\triangle KBX \cong \triangle CKY$，因此$CK=KB$．

所以，为了作图只要过线段CB的中点作直线AB的垂线即可（它与圆周相交于X、Y）．

130．设x、y、$\frac{1}{xy}$为所求的数．如果$x+y+\frac{1}{xy} > \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$，那么作变换后我们得到$(x-1)(y-1)(\frac{1}{xy}-1)>0$，由此看出，左边三个因式中正好有一个因式是正的．

131．答案：不多于2条．有两条边等于最长对角线的多边形的例子见图61．

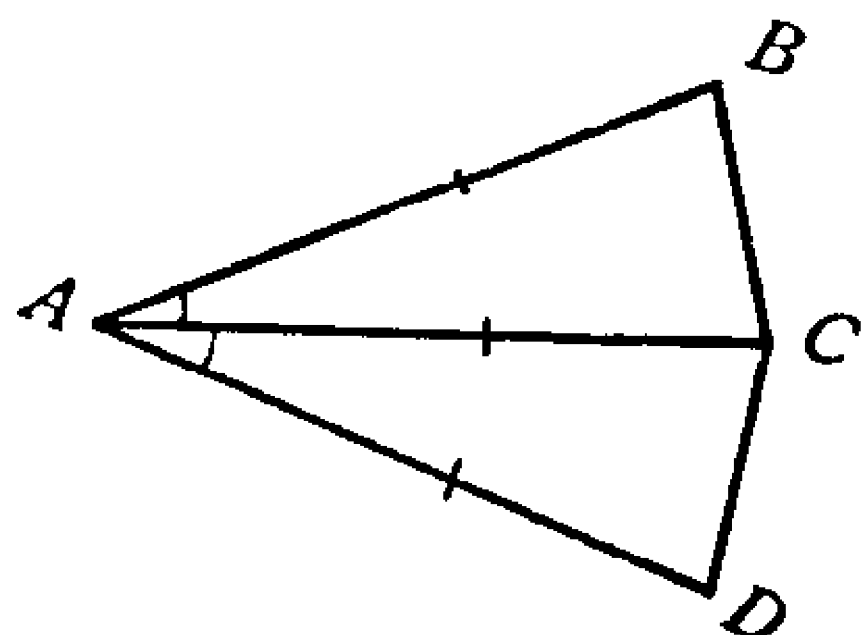


图61

假设那样的边多于两条，从中选择两条AB和CD，它们没有公共点（这是能做到的，因为有对角线的多边形不是三角形）．那么至少有一条对角线AC或者BD比边AB长，因为如果这些对角线相交于某点K，则

*）В．Г．德林弗莱：Об одном цикаическом неравенстве // Мат．заметки．—1971．—т．9，№ 2．

$$AC+BD=AK+KC+BK+KD>AB+CD=2AB$$

132. 假设不然．我们把两个数中的一个写在另一个下面（数位对齐）并把它们相应的数位上的数字加起来，因为和的末位数字为奇数，那么把首位数字相加后也得到奇数和．因此在相加时，1不能由前一数位进到这一数位．这就是说，在第二个数位上的数字和小于10，因此在倒数第二个数位上数字和也小于10．我们指出，从第二个数位到第三个数位也不能进1——仅当第二个数位上的数字和等于9而第一个数位上的数字和大于10时才可能进1，但那时在和的第二数位上的数字将是0．

现在我们去掉已知数的最后两个数字以及开始的两个数字，并对所得的13位数作推理，然后对9位数、最后对5位数作推理，我们得到1不能从和的前一数位进到居中的数位，而因为在两个数居中的数位上的数字相同，因此和的居中数位上的数字是偶数．

从解题过程可看出，此题的结论对于$4k+1$位的数是正确的．简单的例子（12+21，506+605，…）表明，此题的结论对于其它的数不成立．

133. 我们把所有的三角形涂上两种颜色，如图62—1所示．结果是黑三角形比白三角形多k个，因此所有白三角形有$\frac{1}{2}(k^2-k)$个，而黑三角形有$\frac{1}{2}(k^2+k)$个．在三角形的颜色链条中黑白相间，因此在链条中黑三角形不多于$\frac{1}{2}(k^2-k)+1$个，所有三角形不多于

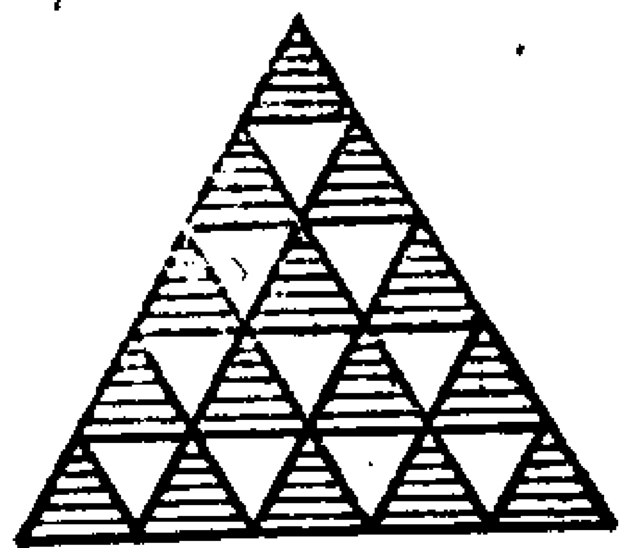


图62—1

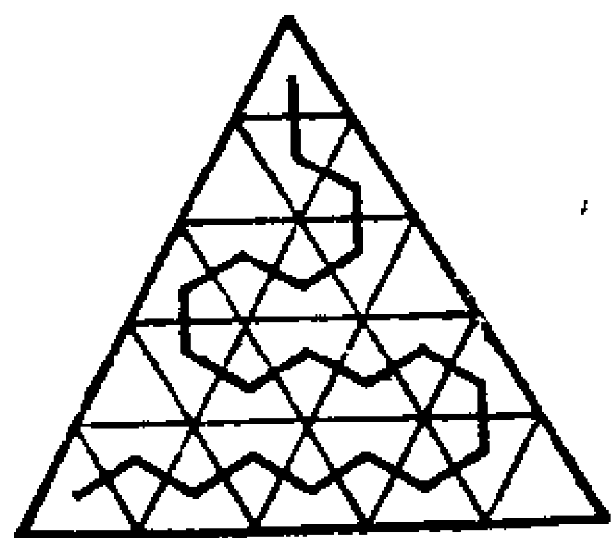


图62—2

$$\frac{1}{2}(k^2-k)+\frac{1}{2}(k^2-k)+1=k^2-k+1.$$

图62—2所示的是三角形的个数恰等于k^2-k+1的链条的例子。

134．设$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$为已知线段的长度．假设这些线段中的任何三条都不能组成一个锐角三角形．那么，因为在非锐角三角形中，最长边的平方大于或等于其它边的平方和，所以下面这些不等式都成立：$c^2\geqslant a^2+b^2, d^2\geqslant c^2+b^2, e^2\geqslant d^2+c^2$．把它们相加，我们得到$e^2\geqslant a^2+2b^2+c^2\geqslant a^2+2ab+b^2$，由此$e\geqslant a+b$，即由长为$e$、$a$和$b$的三条线段不能构成一个三角形．

135．第一种解法：假设$\angle BAC<45^\circ$，那么$\angle ACH>45^\circ$，$\angle BCH<45^\circ$，$\angle CBA>45^\circ$，$BC<AC$，因此中线CP在三角形ACH的内部并且与中线BM相交于点K，点K在线段OM上（O为BM、AD和CH的交点）．由此，再利用等式$PK=KC/2$，我们得到$OH:OC<1/2$；但是根据三角形的角平分线性质有$OH:OC=AH:AC$，即$AH<AC/2$，因此$\angle ACH<30^\circ$，矛盾．

第二种解法：我们要证明，如果$\angle BAC<45^\circ$，那么$\angle ACB>90^\circ$．在直线AB上取使$HB_1=AH$的点B_1，$\angle AB_1C$的平分线B_1F通过点O（已经有三角形AB_1C的两条角平分线相交于这一点）．由角平分线的性质，$AF:FC=AB_1:B_1C$，但是$AB_1:B_1C>1$（因为$\angle B_1AC<45^\circ$）．因此点B_1在点A和B之间，所以$\angle BCA>\angle B_1CA>90^\circ$．

136．我们考察不同数在同一数位上的一切可能的“数字对”．因为在同一数位上有10个“数字对”，那么这样的“数字对”共有$10n$个，而且在每一数位上不同数字的“数字对”即(1，2)不少于4个且不多于6个，因此在$10n$个所挑选的“数字对”中，数字对（1，2）的总数在$4n$和$6n$之间．

另一方面，因为每两个数在m个数位上相同，那么每一个数

对给出了$n-m$个数字对(1,2)。因此这样的数字对共有$10(n-m)$个。于是$4n\leqslant 10(n-m)\leqslant 6n$，由此得$2/5\leqslant m/n\leqslant 3/5$。

137. 我们要证明，从任意199个整数中可以选出100个，使它们的和能被100整除。这里只需要下面这些事实：从任意3个数中可以挑选出奇偶性相同的两个数（这一点是显然的）；从任意9个数中可以挑选出5个数，它们的和能被5除尽。

用P_m表示下面这个一般的命题：从任意$2m-1$个整数中可以选出m个数，它们的和能被m整除（换句话说，可以选出m个数，它们的算术平均值是整数）。我们的证明以下面的引理为基础。

引理1　如果命题P_k和P_m成立，那么P_{km}也成立。

我们来证明这一点。设给定$2km-1$个数，按照P_m，从中选择一组m个数，它们的算术平均值是整数；从剩下的$2km-m-1$个数中照样再选出那样的一组m个数；接着再从$2km-2m-1$个数中选出一组m个数，等等，共选$2k-1$次。此后还剩下$2km-(2k-1)m-1=m-1$个数，因此我们确实能利用P_m $2k-1$次。我们来考察所选的$2k-1$个组中的算术平均值（整数），按照P_k，从中可以选择k个数，它们的和能被k整除。那么进入相应的k组中的km个最初数之和显然能被km整除。引理1得证。

因为$100=2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$，那么我们三次应用引理1就可从$P_2$和$P_5$推出$P_{100}$。剩下的只要验证$P_5$。

要做到这一点，可以利用较简单的枚举法，从9个数除以5所得的9个余数中选择所有可能的数组$0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_9\leqslant 4$，在$r_i$（$1\leqslant i\leqslant 9$）中有5个数相同或者其中没有三个相同的数（因此所有余数为1，2，3和0）的情况是显然的。剩下要考察某个余数r在r_i中或者出现3次，或者出现4次的情况，这里可以认为$r=0$；在相反的情形下，可以把$5-r$增补到9个数中去(此时“5个数的和能被5整除”仍保持不变）。

往下可以由枚举法、并利用下面这个有用的引理得出本题的

结果．

引理2　从任意q个整数中可以选择若干个数，它们的和能被q整除．

（对于q个数a_1，a_2，…，a_q，为了证明引理只要考察q个数a_1，a_1+a_2，$a_1+a_2+a_3$，…，$a_1+a_2+\cdots+a_q$即可：或者它们在除以q时有不同的余数；或者它们之中有两个数在除以q时有相同的余数，因此这两个数的差能被q整除．）

根据引理2从5个非零余数r_i中可以挑选若干个（2至5个）数，它们的和能被5整除，再把非零数增补到5个．

注　可以证明，命题P_n对于任意自然数n都成立（根据引理1只要对素数n证明即可．初等的然而不简单的证明见杂志《Кван-нт》（1971，№7—8，решение задачи M45））．解释下面这个问题是很有趣的：求最小的自然数$F_d(n)$，使得可以从$F_d(n)$个具有整数坐标的向量中选择若干个向量，它们和的所有坐标都能被n整数（这里n为自然数，d表示维数．当$d=2$时，用于平面上的向量，$d=3$时用于空间中向量）．

138．解法1．设P是内切圆与BC边的切点，PQ是内切圆的直径．在解第112题时曾证明过$AQ\parallel MO$，因此$AEOQ$是平行四边形，所以$OQ=AE=r$．

解法2．设三角形ABC的边长分别为a、b、c．可以认为$b>c$．从点O作BC的垂线OP，那么

$$MC=\frac{a}{2};\ PC=\frac{a+b+c}{2};\ HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{2HC-a}{b-c}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1,$$

由此得$AE=r$。

139．如果把数k记为$k=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}$，$t$表示由$m>n$个9组成的数：$t=\underbrace{99\cdots9}_{m个}=10^m-1$，那么

$$kt=a_na_{n-1}\cdots(a_0-1)\underbrace{99\cdots9(9-a_n)(9-a_{n-1})\cdots(9-a_1)(9-a_0)}_{m个数字}$$

kt的数字之和就是t的数字之和，它等于$9m$。

140．设a和b为每一个矩形的边长．如果两个矩形的边界相交于8个点，那么任意一个矩形的每一条边与另一个矩形的两条邻边正好有两个交点．如果在某一条边上的交点少于两个，那么那样的点总共将少于8个．因此一个矩形的任何一条边不可能与另一个矩形的两条平行边相交．

现在设A和C是两个矩形中长度为a的边之交点；B和D是长度为b的边之交点（图63）．容易看到，线段AC是由通过点A、C的两个矩形之边所成角的平分线，同样BD也是通过点B、D的两矩形之边所成角的平分线．所以$AC\perp BD$．四边形$ABCD$的面积等于AC．BD．而因为$AC\geqslant b$，$BD\geqslant a$，因此$S\geqslant ab/2$．

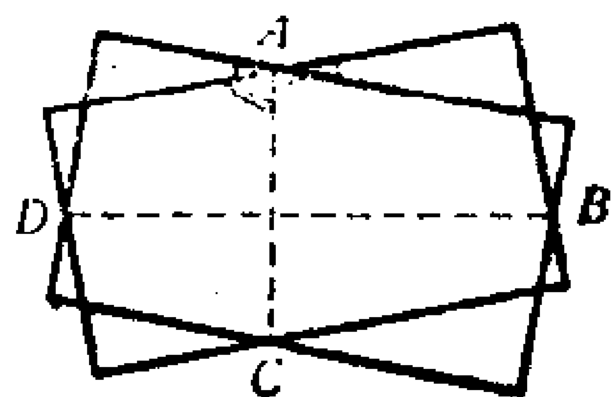


图63

141．我们要证明任何那样的数能被11111整除，因此不是2的幂．为此我们指出，10^5在除以11111时有余数1：$10^5=9\cdot11111+1$，因此所给的任何数在除以11111时余数相同，卡片上的所有数之和也是这样．

也不难证明，任何那样的数能被9整除．然而容易看到所得数的和等于$\frac{11111+99999}{2}\times(10^5-1)$，即能被11111整除．

142．设D_1为由10个数字$\{0, 1, \cdots, 9\}$构成的集合，$A_1=\{0, 2, \cdots, 8\}$为偶数字集合，$B_1=\{1, 3, \cdots, 9\}$为奇数

字集合．一般地，对于任意的n，我们用D_n表示不多于n位的所有数的集合，A_n和B_n分别表示由D_n中数字和为偶数及奇数的数所构成的子集($D_n = A_n U B_n$)．我们指出，B_n和A_n各含有$5 \cdot 10^{n-1}$个元素，零也计算在内．集合X的所有元素x之和简单地记为Σx，我们应该证明 $\sum\limits_{a \in A_n} a^k$等于 $\sum\limits_{b \in B_n} b^k$．我们把这个和记为$S_n^{(k)}$

当$n=2, k=1$时问题归结为显然的等式(其中$a \in A_1, p \in A_1$，$b \in B_1$，$q \in B_1$)：

$$\Sigma(10a+P)+\Sigma(10b+q)=\Sigma(10a+q)+\Sigma(10b+p)$$

当$d_1 \in D_1$，$r \in D_1$时，两边都等于$5(\Sigma 10d+\Sigma r)$，$S_2^{(1)}=$ $5(10+1)(1+2+\cdots+9)$，因为每个数字a、p、b、q进入两边的和各五次．

我们首先用$n=3$的例子来解释进一步的计算．对于一切$a \in A_1$，$P \in A_2$，$b \in B_1$，$q \in B_2$（下面$d \in D_1$，$r \in D_2$）求和：

$$\begin{aligned}&\Sigma(10a+p)^2+\Sigma(10b+q)^2=50 \cdot 10^2(\Sigma a^2+\Sigma b^2)\\&\quad+2 \cdot 10(\Sigma a \cdot p+\Sigma b \cdot q)+5\Sigma p^2+5\Sigma q^2\\&=10^2\Sigma d^2+2 \cdot 10(\Sigma a \cdot \Sigma p+\Sigma b \cdot \Sigma q)+5\Sigma r^2\\&=5 \cdot 10^3\Sigma d^2+20\Sigma d s_2^{(1)}+5\Sigma r^2.\end{aligned}$$

显然，和$\Sigma(10a+q)^2+\Sigma(10b+p)^2$也能同样地得到改进．这里我们利用了恒等式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$以及$\Sigma uv=\Sigma u \cdot \Sigma v$（关于一切$u \in U$、$v \in V$的和）．

现在我们用关于n的归纳法来证明一般的结论．这里将利用公式

$$\begin{aligned}(x+y)^k&=x^k+C_k^1 x^{k-1}y+C_k^2 x^{k-2}y^2+\cdots+C_k^{k-1}xy^{k-1}+y^k\\&=x^k+\Sigma C_k^j x^{k-j}y^j+y^k\end{aligned}$$

（二项式系数C_k^j，$1 \leqslant j \leqslant k-1$，在我们的推理中不起作用）以及$\Sigma uv=\Sigma u \cdot \Sigma v$．假设对于$n$位数和任意的$k$，$1 \leqslant k < n$，所需

的等式已证：$\Sigma p^{j}=\Sigma q^{j}=S_n^{(j)}$（其中$p\in A_n$，$q\in B_n$），我们来改进$A_{n+1}$中数的$k$次幂之和，$k<n+1$（下面对一切$a\in A_1$，$p\in A_n$，$b\in B_1,q\in B_n,d\in D_1$，$r\in D_n$进行求和，$1\leqslant j\leqslant k-1$）：

$$\begin{aligned}\Sigma(10a+p)^k+\Sigma(10b+q)^k&=5\cdot 10^{n-1}\cdot 10^k(\Sigma a^k+\Sigma b^k)\\&\quad+\Sigma C_k^j 10^{k-j}(\Sigma a^{k-j}p^j+\Sigma b^{k-j}q^j)+5(\Sigma p^k+\Sigma q^k)\\&=5\cdot 10^{n+k-1}\Sigma d^k+\sum_j C_k^j 10^{k-j}S_k^{(j)}\Sigma d^{k-j}+5\Sigma r^k\end{aligned}$$

显然，B_{n+1}中数的k次幂之和等于同一个表示式（仅需要改变字母p和q的位置）。

注　当d为偶数时，在任何d进制记数法中类似的等式也成立，例如在二进制中，当n不大时可以容易地直接验证。

143． 如果有公共起点O的单位向量组e_1，e_2，…，e_m在旋转$2\pi k/m$角度后（$k<m$）变为自己，则称该单位向量组为对称的。显然这样的一组向量之和等于0，因为它在旋转$2\pi k/m<2\pi$的角度后不变。

特别，当$k=1$时，以正m边形的依次相邻的顶点为端点的向量组构成一个对称向量组。

我们把起点为O的一切单位向量作旋转变换：$e\to D^le$（l次旋转）：把从初始方向OX到e的角增加到l倍，且把所得到的向量记为D^le。在作变换D^l时，只要kl不被m整除，那么对称向量组变为对称向量组(相邻向量e_i，e_{i+1}之间的夹角$2\pi k/m$增加到l倍；从$2\pi kl/m$中减去2π的倍数后，就得到D^le_i与D^le_{i+1}之间的夹角等于$2\pi r/m$，其中r为kl除以m的余数）；如果kl能被m整除（特别当$k=m$时），所有向量D^le_i都重合为一个向量。

在作了这些注释之后，我们来着手解题。假设能把n边形的所有顶点涂上若干种颜色，使一种颜色的顶点能构成一个正多边形：l边形、q_1边形、q_2边形、…、q_s边形，其中$l<q_1<q_2<\cdots<q_s$。我们同样可以把在n边形的顶点上所作的对称向量分成$S+1$个对

称向量组，它们分别有l个、q_1个、q_2个、…、q_s个向量. 暂时什么矛盾也没有. 每一个这样的向量组中的向量之和等于0，且总和也等于0. 然而只要把所有向量旋转l次，就产生了矛盾：第一组的所有l个向量重合为一个向量，所以它们的和异于0，而有q_i（$i=1, 2, \cdots, s$）个向量的其余向量组及由所有n个向量构成的向量组仍然是对称的，因为它们的相邻两个向量之间的夹角分别为$2\pi l/q_1<2\pi$，$2\pi l/q_2<2\pi$，…，$2\pi l/n<2\pi$，因此它们的和仍然等于0.

注　这个漂亮的解法是由A. 利菲茨想出来的，其实在这次奥林匹克竞赛上他已经是评委会的成员了，而任何参赛的中学生解这题都没有成功.

如果我们把向量看作复数，那么把向量作"l次旋转"的思想就变得更加清楚了. 变换D^l——它就是复数z的乘方运算：$z\to z^l$，$|z|=1$；对称的向量组是几何级数：$u, u\varepsilon, u\varepsilon^2, \cdots, ue^m$，其中$|u|=1$且$\varepsilon$是1的某个$m$次方根，$\varepsilon\neq1$；如果数$\varepsilon$的幅角——向量组的相邻向量之间的夹角——等于$2\pi k/m$，那么这样的向量组由指向正$m/d$边形的顶点向量构成，其中$d$是$m$的某个因数，$d<m$，同时$d$个向量指向同一个顶点.

此题的解法表明，把整数集合Z分成若干个不相交的（双边无穷的）算术级数的任何分法仅仅可以用下面的方法得到：Z分成d个具有同一个公差d的级数，然后它们之中的一个（或若干个）再分成有同一公差的级数，等等. 我们解题的方法在复数函数理论中称为"三角和的方法".

第　五　届

144. 此题可用数学归纳法来证明. 当$n=1$时应取2. 如果

$A=2^n\cdot B$是能被2^n整除的n位数，那么因为5^n+B或者$2\cdot 5^n+B$是偶数，则$2\cdot 10^n+A$或者$1\cdot 10^n+A$能被2^{n+1}整除．

注．对于每一个n，所求的数正好1个．此外，由数字1和2组成的一切n位数除以n时有不相同的余数．利用这些可以得到此题的第二种解法．

145．1)能由2)得到，所以我们来解2)．

因为点B_k和D_k到直线OA_k的距离相同，因此$S_{OA_kB_k}=S_{OA_kD_k}$．把n个等式连乘并且把三角形的面积记为底边A_kB_k或A_kD_k与相应高乘积的二分之一，再经过约分就得到了所要求的等式．

注　在1)中，施到硬薄片$A_1A_2A_3$中的点A_k上的力$\overrightarrow{A_kC_k}$互相平衡，即薄片固定不动，而且所有力（如同向量）之和与所有力矩之和都等于0，因为每一个力关于点O的力矩都等于0．

对于三角形来说，为使直线A_kC_k相交于一点O，题中要证的等式不仅是必要的而且也是充分的条件．

146．1)答案：11个问题．在知道一行中所有10个数以及另外一行中的一个数之后，就容易复原其它所有的数．如果仅提10个问题，则要单一地复原所有数是不可能的．一方面，在每一列里应该至少知道一个数，否则可以把任意数x加到这一列的两个数上而保持这一列所需要的性质；另一方面，至少在一列中应该知道两个数，否则可以取任意数y作为每一列里的数之差并根据已有的数来作出表格．

2)可用数学归纳法来进行证明．我们将认为$n\geqslant m$，并对$m+n$进行归纳．如果在某一列中不知道任何数，那么，显然数的复原不单一．如果在每一列中有已知的数，那么（因为共有$m+n-2$个不超过$2n-2$的已知数）存在一列，在这列中只有一个已知数，而在划去这一列之后剩下的$(n-1)m$表格仅含有$m+(n-1)-2$个已知数，而且根据归纳假设复原不是单一的．

注　此题中的估计是精确的．可以根据第一行和第一列的

$m+n-1$个数来复原出下列形式的表格：

$$\begin{array}{llll} x_1 & x_2 & \cdots x_n & \\ x_1+y_1 & x_2+y_1 & \cdots x_n+y_1 & (*) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ x_1+y_{m-1} & x_2+y_{m-1} & \cdots\cdots x_n+y_{m-1} & \end{array}$$

对于更精细的问题，即$m\times n$的表格中剩下什么样的一组数才能根据它复原整个表格，它的回答可以用图论的语言来做.

我们研究有$m+n$个顶点A_1、…、A_m和B_1、…、B_n的“双叶图”Γ，其中某些顶点A_i与某些顶点B_j相连接，因而指出了$m\times n$表格的元素对(i, j)的某个集合$\widetilde{\Gamma}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）. 当且仅当图Γ是连通的，才能根据$\widetilde{\Gamma}$来单一地复原整个表格. 由第8题知，在有$m+n$个顶点的树中正好有$m+n-1$条棱；如果Γ是树，那么占有格子$(i, j)\in\widetilde{\Gamma}$的任意$m+n-1$个数都能补足，使得到的表格有需要的形式（$*$）.

147. 我们来考察图形F_1和F_2，它们是由已知图形F（若干个圆的并集）分别平移了长为0.001且彼此之间夹角为60°的两个向量得到的.

3个图形F、F_1和F_2都在边长为1.001的正方形内部且互相不重叠，因此每一个图形的面积小于$(1.001)^2/3<0.34$.

注　可用类似的方法得到此题的空间形式的估计$(1.001)^3/4<0.26$.

在平面上也可进行更精确的估计，例如可证明$S<0.287$（参看《Квант》，1972，№8，С，58）

148. 设在3个容器A、B、C中分别装着水a升、b升、c升，$0<a\leqslant b\leqslant c$. 只要用若干次重倒就能使一个容器中的水少于$a$升（重复这种做法可把一个容器中的水倒空）. 设$b=ad+r$，$0\leqslant r<a$，我们把$B$、$C$中的水倒进$A$中（$A$中的水就会变成$2a$、$2^2a$、$2^3a$、…、$2^ka$升）并注意从$B$中正好倒出$da$升水；那么在$B$中还

剩$r<a$升水．这么做是可能的，因为像每一个自然数一样d能表示为1，2，2^2，…，2^k，…中若干个数之和的形式．因此从B中k次倒出相应的da升水之后，如果A中的水不足2^ka升，则再从C中倒若干升水到A中补足到2^ka升．这时从C中倒出的水要比从B中倒出的少，因此C中还有水．

149．二次三项式$f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$与$f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$的根都是实数且相间的条件等价于：函数$y=f_1(x)$与$y=f_2(x)$的图像相交于横坐标轴下方的点(x_0, y_0)，$y_0<0$．解方程$f_1(x)=f_2(x)$，我们得到$x_0=(q_2-q_1)/(p_2-p_1)$，$y_0=R(p_1-p_2)^2$，其中$R=(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)$．

注　当且仅当f_1和f_2有公共根（可能是复根）时表达式$R=0$．R称为f_1、f_2的"消元式"．

150．如果两个平面互相平行，这是显然的．假设它们不平行，那么物体对两个平面的交线l的投影可看作是这个物体在某个平面上的投影对l的投影（这里是指垂直投影，即是垂足的集合）．但是圆对与它在同一个平面上的直线的投影是等于圆的直径的一条线段．

151．相邻数的两两乘积之和S随着运算次数的增加而增大．（如果$(a-d)(b-c)<0$，那么$ab+cb<ac+bd$．因此，若b、c互换位置后，$ab+bc+cd$就变为$ac+cd+bd$，并且有$ab+bc+cd<ac+cb+bd$．）但是和S只能取有限个不同的数值（索13）．

152．因为1）可从2）得出，所以我们来解2）．设直线l与外切多边形的边界相交于R、Q两点并且等分它的周长，那么由OR和OQ两条线段组成的折线等分多边形的面积，这里O是内切圆的圆心．这一点可像证明周长为P的外切多边形的面积公式$S=Pr/2$那样来证明：把圆心和多边形的每个顶点连结起来得到若干个三角形，三角形的高是内切圆的半径，再把每个三角形的面积写成底边与高乘积的二分之一．因此如果直线RQ也等分多边形的面积，那么点O应该在这条直线上．

注　一个有趣的问题是：能等分外切多边形的面积和周长的那样的直线可能有多少条？（《Квант》，1972，№7，C，35）。

153．当$n \geqslant 4$时，结论对n个数成立，并用反证法加以证明．假设n个不同数$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$中的任意两个数的和或差包含在其余$n-2$个数之中，那么$a_n + a_i > a_n$，而且应该有$a_n - a_i = a_{n-i}(1 \leqslant i \leqslant n-1)$．当$n=2k$时得到$a_n - a_k = a_k$，这就是说$a_n$与$a_k$之差不包含在其余数之中；当$n=2k+1$时应当再考察数对（$a_{n-1}$，$a_i$）：对于它们有$a_{n+1} + a_1 = a_n$，且当$2 \leqslant i \leqslant n-2$时$a_{n-1} + a_i > a_n$，而且应该有等式$a_{n-1} - a_i = a_{n-i-1}$，特别$a_{n-1} - a_k = a_k$，这也得到了矛盾．

154．1)把12个顶点分成6组相对的顶点：A_1A_7、A_2A_8、A_3A_9、…、A_6A_{12}．每次改变符号时每组点中只有一个顶点改变符号．因此在第$2k-1$次改变符号之后，A_2A_8、…、A_6A_{12}中每一组里两个顶点上的符号都不相同，而在第$2k$次改变符号之后，每一组中两个顶点上的符号都相同（而在A_1A_7中一切都相反）．因此不可能出现这样的情况：在A_2A_8中两个顶点上的符号不同，而在A_3A_9中两个顶点上的符号相同．

2)把所有顶点分成4组，每组3个顶点：$A_1A_5A_9$、$A_2A_6A_{10}$、$A_3A_7A_{11}$、$A_4A_8A_{12}$．每次改变符号时每组中只一个顶点改变符号．因此可像1)中那样进行推理．在每一组中负号数目的奇偶性在每次改变符号时都改变，因而在$A_2A_6A_{10}$和$A_3A_7A_{11}$中负号数目的奇偶性相同．

3)把所有顶点分成3组$A_1A_4A_7A_{10}$、$A_2A_5A_8A_{11}$、$A_3A_6A_9A_{12}$时可进行类似的推理．

注　一般地，我们也能知道，改变n边形k个相邻顶点上的符号后每组顶点中符号变化的情形．答案是这样的：取$d=(n, k)$，使d数组$(x_1, x_2, \cdots, x_d)$与n边形顶点上的每一个n数组ε_1，ε_2，…，ε_n，$\varepsilon_i = \pm 1$，对应，这个对应满足

$x_i = \varepsilon_i \varepsilon_{i+d} \cdots \varepsilon_{i+n-d}$.

那么(ε_i)、(ε'_i)能够互换当且仅当或者相应的(x_i)、(x'_i)相同，或者k/d是偶数并且(x_i)、(x'_i)的符号相反，即对于一切i有$x_i = -x'_i$。

155．可以用“两等分法”来做．从平面中剪下由$2^n \times 2^n$个格子组成的大正方形K_0，它包含了所有的黑格子，而且使白格至少是黑格的4倍．那么黑格子的面积不足正方形K_0面积的1/5．再把K_0分成4个正方形K_1，K_1中每个正方形有$2^{n-1} \times 2^{n-1}$个格子，而且在每个这样的正方形中黑格子所占的面积不超过其面积的4/5．所以，或者K_1满足条件1)、2)，或者可以重新把K_1再分成4个正方形K_2，等等，直到得到2×2的正方形为止，并把其中任何格子都没有涂过色的正方形去掉，而把有一个格子、两个格子、3个格子被涂成黑色的正方形留下．

注　对于能被分成单位线段的直线（常数为1/3、2/3）以及能分成单位立方体的空间（常数为1/9和8/9）也可以提出类似的问题．

156．答案：至少需要的小立方体个数为

$$A_n = \begin{cases} n^2/2, & \text{如果}n\text{为偶数} \\ (n^2+1)/2, & \text{如果}n\text{为奇数}. \end{cases}$$

特别，$A_2 = 2$，$A_3 = 5$，$A_4 = 8$，$A_5 = 13$，$A_{10} = 50$．

至于较少个数的小立方体不够用的证明这样来进行．在满足此题要求的小立方体放置好后，我们在立方体底面的每一个格子中写一个数，它指出在这个格子的上方有几个所选的小立方体．现在利用下面的引理：

引理：在$n \times n$的表格中填满了非负整数，对于表格中的任意一个数0，如果它所在的那一行和那一列中其余$2n-1$个数之和不小于n，那么表格中所有数之和不小于$n^2/2$．

它的证明类似于第126题中的证明．

如果按行相加和按列相加所得和中的最小数等于$m<n$，不妨设这个最小的和m就是第一行中所有数之和。那么在第一行中至少有$n-m$个零，在有这些零的$n-m$个列中，每一列中所有数之和不小于$n-m$。而在其余的m个列中，每一列中所有数之和不小于m，所以表格中所有数之和不小于

$$(n-m)^2+m^2\geqslant n^2/2.$$

在$5\times5\times5$的立方体里放置12个小立方体以及在$10\times10\times10$的立方体里放置50个小立方体的例子见图64，在这里格子中的数表示位于这个格子上方的小立方体所在层的号码。

		4	3	5
		3	5	4
		5	4	3
1	2			
2	1			

$n=5$

					6	7	8	9	10
					7	8	9	10	6
					8	9	10	6	7
					9	10	6	7	8
					10	6	7	8	9
1	2	3	4	5					
2	3	4	5	1					
3	4	5	1	2					
4	5	1	2	3					
5	1	2	3	4					

$n=10$

图64

当n等于其它数时也可类似地举出例子。

注　如果再知道任何两个小立方体只有一个坐标相同，那么最有趣的结果是对“小立方体”$(x_1, x_2, \cdots x_k)$的个数得到下估计：这个数目不超过$n^{k-1}/k-1$。

157．我们应该对于平面上的任意点(x, y)找到使$f_a(x-m, y-n)$尽可能小的整数格点(m, n)并求出极小值$\bar{f}_a(x,y)=\min\limits_{m,n} f_a(x-m, y-n)$的上估计。为了方便起见，我们把$\sqrt{f_a(x_1-x_2, y_1-y_2)}$称为点$(x_1, y_1)$与点$(x_2, y_2)$之间的距离，它类似于通常的距离$\sqrt{f_0(x_1-x_2, y_1-y_2)}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，我们指出，对于这个距离有$\bar{f}_0(x,y)\leqslant 1/2$。事实上，对于每一个正方形：$m-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\leqslant$

$y\leqslant n+\frac{1}{2}$，从它的任何点（x，y）到中心(m，n)的距离不大于$\sqrt{2}/2$，同时这个正方形的任何顶点到(m,n)的距离等于$\sqrt{2}/2$，即$\bar{f}_0(x_0, y_0)=1/2$。

现在对于“距离”$\sqrt{f_a}$，$0<a<2$，我们来建立把平面分成若干个图形Φmn的分法：如果点(x,y)到点(m,n)的距离小于（或者不大于）它到其它任何格点的距离，就称点(x,y)属于图形Φmn。我们只要找到以（0,0）为中心的图形$\Phi 00$，其余的图形Φmn都可由$\Phi 00$用平移中心的方法得到（把中心从(0，0)移到(m，n)）。这是因为在作这种平移时，距离$\sqrt{f_a}$保持不变，因而具有其它中心的任意区域中的点在运动时所遵循的原则也保持不变。

现在我们利用距离f_a的平方是坐标的二次函数这个事实，得到与点(0，0)较近而与点(m，n)较远的点（x，y）的集合：这是一个半平面。

$$x^2+axy+y^2\leqslant(x-m)^2+a(x-m)(y-n)+(y-n)^2$$

这个不等式等价于

$$(2m+an)x+(2n+am)y\leqslant m^2+amn+n^2.$$

为了找到图形$\Phi 00$应该取一切那样半平面的交集（取遍一切异于(0，0)的(m，n)）。实际上，只要取其中的6个半平面的交集，这6个半平面对应的点(m，n)是(0，±1)，(±1,0)，(1，−1)，(−1，1)。因此$\Phi 0$，0是凸六边形：$-1\leqslant 2x+ay\leqslant 1$，$-1\leqslant ax+2y\leqslant 1$，$-1\leqslant x-y\leqslant 1$。为了看出这点还需要证明，在把中心从(0,0)移到(m，n)后$\Phi 00$与它的像集合不相交（准确地说，它们只有公共边界，见图65）

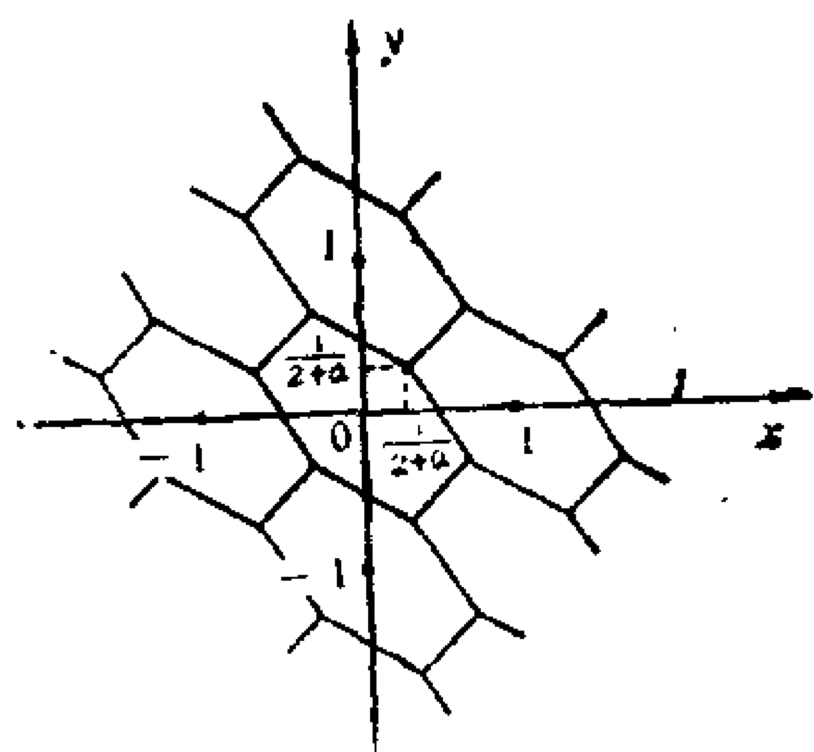


图65

当(x，y)$\in\Phi 00$时，$f_a(x, y)$在这个凸六边形的顶点上达到它的极大值。因为当(x，y)沿着任何直线$x=b+ut$，$y=c+vt$上

的线段运动时，距离$f_a(b+ut,c+vt)$的平方是t的二次三项式，它的首项系数为$u^2+auv+v^2\geqslant 0$，所以f_a在线段的端点取得极大值。求出顶点的坐标（图65）并把它们代入f_a的表示式中，我们得到$\bar{f}_a$的精确估计：$\bar{f}_a\leqslant 1/(a+2)$。在$a=2$时，当$\bar{f}_2(x, y)$是$x+y$与邻近的整数之差的平方时，精确的估计是$\bar{f}_2(x, y)\leqslant 1/4$。

注　解这个题的基本思想是把平面分成包含所给中心的若干区域，每一个点属于一个区域。这是在各种分析问题、几何和数论问题中常用的方法。

158. 我们首先对必需的转换开关的数目作一个下估计。因为每一个转换开关可以有两种状态，那么由m个转换开关构成的线路图可能有2^m个不同的状态。如果必须实现n个入口和n个出口的$n!$次不同的连接：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{matrix}$$

其中（$i_1,i_2,\cdots,i_n$）是数1，2，…，n的任意重排，那么转换开关的个数m必须满足$2^m\geqslant n!$，即在通用线路图中转换开关的个数显然不少于$\log_2(n!)$。

特别，当$n=3$时有$2^m\geqslant 6$，由此$m=3$。不难验证，在图8·2中所指出的线路图正好给出了3通用线路图的例子。当$n=4$时我们得到$2^m\geqslant 4!=24$，由此$m\geqslant 5$。确实，用5个开关可以建立4通用的线路图：请验证一下，在图66—1的线路图中当转换开关有$2^6=32$个不同状态时，实现了集合{1，2，3，4}的所有可能的24个重排。

因为8！太大了，因此不可能用枚举法来证明在图8—3中表示的线路图是8通用的。然而不难指出在此线路图中实现8个元素的任意重排（$k\to i_k$，$k\in\{1, 2, \cdots, 8\}$）的规则，这个规则应该指明，经过哪一块（A或者B）来实现8条联结中的

每一条联结$k \to \phi(k)=i_k$，$k=1$，2，…，8．同时还应该满足条件：

如果$k-l=4$或者$i_k-i_l=4$，那么$k\to i_k$和$l\to i_l$的联结应该通过不同的块A和块B。显然，这些条件对于避免“堵塞”（即两个入口与一个出口相联或者相反的情形，这在实际电话网中常常遇到）是必要的和充分的，这就是我们所需要的规则．

我们说，两对联结$j\to\varphi(j)$、$l\to\varphi(l)$与联结$k\to\varphi(k)$“相邻”是指$|k-j|=4$，$|\varphi(k)-\varphi(l)|=4$．那么所有的联结$k\to\varphi(k)$可以分为若干个“环”，每一个环有两个相邻的环，同时各个环都含有偶数对联结，在每一个环中将轮流地通过块A和块B实现$k\to\varphi(k)$的联结．于是相邻的环通过不同的块而联系在一起．

现在由4通用块A和4通用块B可得到整个线路图的8通用．类似地由两个2^k通用线路图和$2\cdot 2^k$个转换开关可以建立2^{k+1}通用线路图．

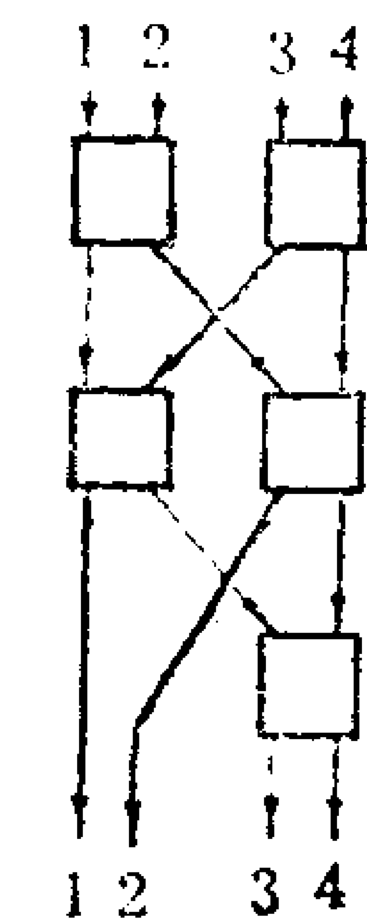
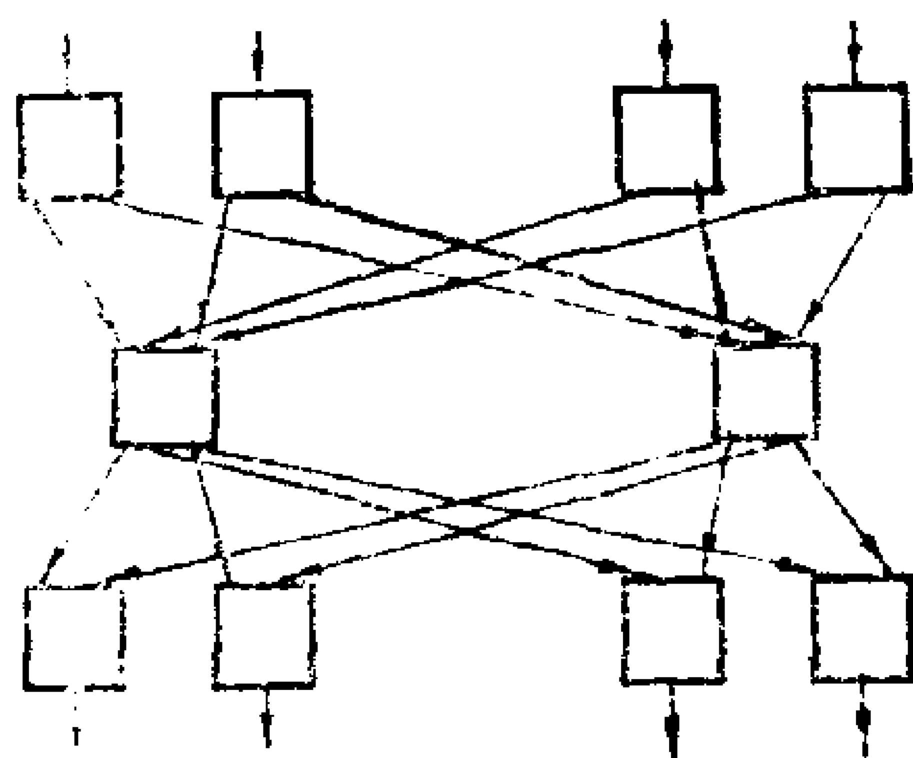


图66—1


图66—2

如果从5个基本的4通用图开始（显然，这要比从2通用开关开始（图66—1）来得到4通用图（图66—2）优越些），那么当$n=2^k$时，线路图将包含$2n\log_2 n-\frac{11}{4}n$个转换开关（特别当$n=8$时它等于26）．这对于任何$n\neq 2^k$给出了在最小的n通用线路图中所需开关数的一个上估计．只要稍微改变图66—3中线路图的结构，就能从k通用变到$2k$和$(2k+1)$通用的线路图，而且所需

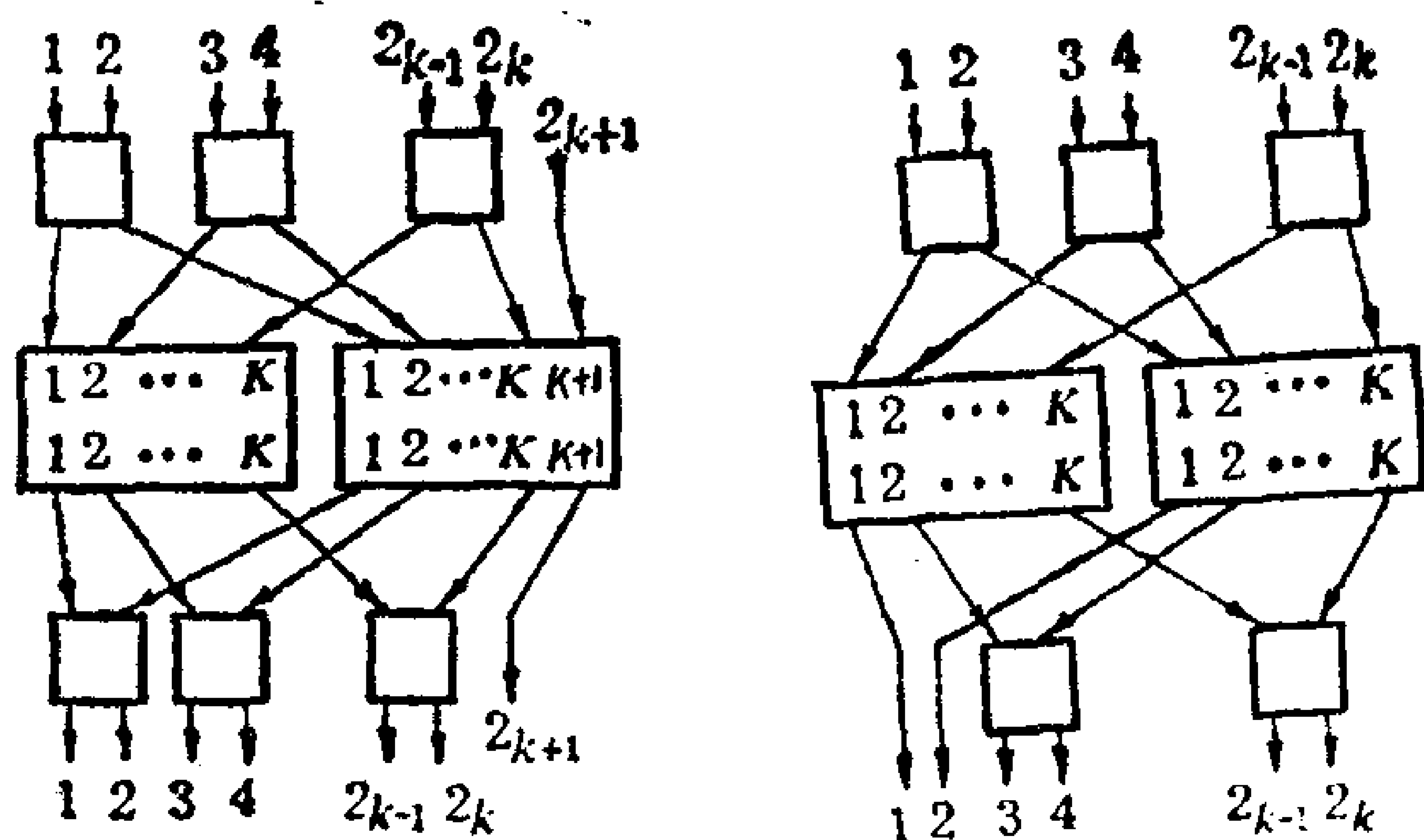


图66—3

开关数的上估计为$n\log_2 n$。注意到，对于大的n，$\log_2 n! \approx n(\log_2 n - \log_2 e)$。

第 六 届

159．设R是直线QN与CD的交点，而O是矩形$ABCD$的中心。由$OM=ON$得到$PC=CR$。因此三角形PNR是等腰三角形（NC同时是这个三角形的中线和高）．

由$\angle MNP=\angle NPR$，$\angle QNM=\angle QRP$可得到此题的结论。

160．设$[a_1,b_1]$是有最小右端点的线段．如果有7条以上的线段包含点b_1，那么此题就解出来了．如果包含点b_1的线段少于或者等于7条，那么至少有43条线段，它们完全在线段$[a_1,b_1]$的右侧．我们从中选取有最小右端点的$[a_2,b_2]$ 那么或者b_2属于8条线段，或者在b_2的右边有36条线段．继续这个推理，我们或者找到属于8条线段的点，或者得到7条两两不相交的线段$[a_1,b_1]$、$[a_2,b_2]$、…、$[a_7,b_7]$，使在$[a_k,b_k]$的右边至少有$50-7k$条线段，即$[a_7,b_7]$的右边至少有一条线段$[a_8,b_8]$。

注 同样也可证明，从$mn+1$条线段中或者可以选取$m+1$条两两不相交的线段，或者可以选取有公共点的$n+1$条线段．类似的问题是：从任意$mn+1$个自然数中可以选取一串$m+1$个数，在这串数中每一个数都可以被前一个数整除，或者可以选取$n+1$个数，其中任何一个数不能被另外一个数整除．这是狄鲁尔斯一般定理的特殊情形：在由$mn+1$个元素构成的偏序集合里或者有按递增顺序排列的一串元素或者有$n+1$个两两不可比较的元素（[64]、[4]中5—5）．

为了把这个定理应用到本题中，作如下约定：如果一条线段完全在另一条线段的右边，就说这条线段"大于"另一条线段．那么"两两不可比较"的线段一定有公共点（即它们右端点中最左边的那个端点）．

161．答案：$x=1972$．因为$4^{27}+4^{1000}+4^{x}=2^{54}(1+2\cdot2^{1945}+2^{2x-54})$，当$2x-54=2\cdot1945$即当$x=1972$时括号中的表达式是一个完全平方．如果$x>1972$，那么$2^{2(x-27)}<1+2\cdot2^{1945}+2^{2(x-27)}<(2^{(x-27)}+1)^{2}$，即所给数界于两个连续自然数平方之间．

162．首先证明下列两个命题：

1)如果$a^{k}+b^{k}$能被$a^{n}+b^{n}$整除，则$a^{k-n}-b^{k-n}$能被$a^{n}+b^{n}$整除．

2)如果$a^{l}-b^{l}$能被$a^{n}+b^{n}$整除，则$a^{l-n}+b^{l-n}$能被$a^{n}+b^{n}$整除．

这两个命题容易由a、b互质和下列恒等式得到：

$$a^{k}+b^{k}=a^{k-n}(a^{n}+b^{n})-b^{n}(a^{k-n}-b^{k-n}),$$

$$a^{l}-b^{l}=a^{l-n}(a^{n}+b^{n})-b^{n}(a^{l-n}+b^{l-n}).$$

我们用n除m得到余数r：$m=qn+r$，其中$0\leqslant r<n$；从m中减去qn得到r．

由此题的条件及命题1)、2)得到$a^{r}+(-1)^{q}b^{r}$能被$a^{n}+b^{n}$整除，但是$0\leqslant|a^{r}+(-1)^{q}b^{r}|<a^{n}+b^{n}$，由此得到$r=0$（同时$q$是

奇数1）.

163．假设在表格的某些行中有相同的数，设n是这些行中最上那一行的号码，而p和q是这一行中相同的数.

因为在第$n-1$行中没有相同的数，而p、q是第$n-1$行中的数r、s经过不同的运算得来的．设$p=r^2$，$q=s+1$，那么$s=r^2-1$.

数s是由数a经过若干次乘方运算及加1的运算得到的．因为$s=r^2-1$，所以$r-1$可能是在得到s过程中作平方运算的最大数．这就是说数s是由$(r-1)^2$至少经过$r^2-1-(r-1)^2=2r-2$次加1的运算得到的．于是从数a得到s至少需$2r-1$次（即$n-2\geqslant 2r-1$）运算．但r与s在同一行里，且由a经过那么多次运算得到的任何数不小于$a+2r-1>r$，于是由a得到s的过程中没有进行乘方运算．所以q是第n行中最右边、最小的那个数，这与$p=q$矛盾.

注　分析解题过程可以看出，可用任何一个取值为自然数的任意函数来代替乘方运算，例如$f(n+1)-f(n)>n+1$即是一个这样的函数.

164．我们按边长递减的次序来分放所有正方形，并从最大的正方形开始自左向右把它们放到面积为$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$的正方形的底边上（图67）；只要依次而放的正方形放不下时（即从大正方形的右侧露出一部分时），我们就沿着最左边正方形的上侧作一条水平线并开始新的摆放．设$x=h_1$，h_2，…为与大正方形左侧相接连的小正方形的边长，我们应该证明$h=h_1+h_2+\cdots$小于$\sqrt{2}$.

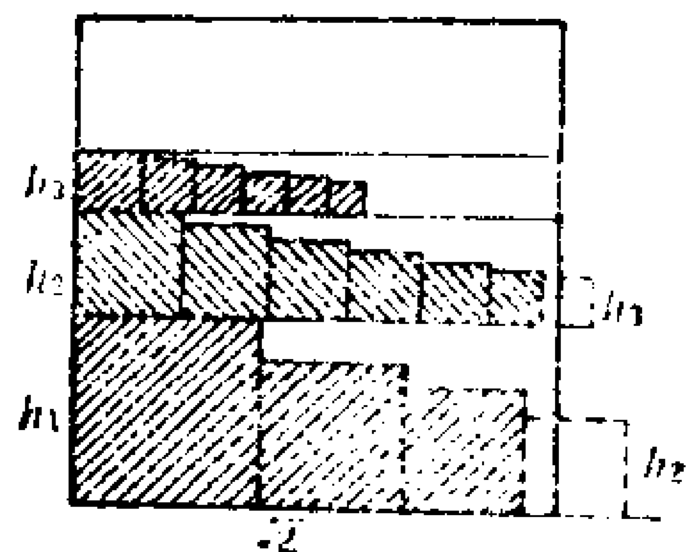


图67

我们现在来估计这些小正方形的总面积．我们在心里把第k行最左边的边长为h_k（$k=2$，3，…）的那个小正方形移到前一

行即第$k-1$行的末端，那么它就从大正方形的右侧露出了一部分。因此第$k-1$行中所有正方形的面积不小于$(\sqrt{2}-x)h_k$；同时在第一行中不计算左边最大的那个正方形。于是所有这些小正方形的总面积不小于

$$x^2+(\sqrt{2}-x)(h_2+h_3+\cdots)=x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x).$$

因为$\sqrt{2}-x>0$，由不等式$x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)\leqslant 1$得出

$$h\leqslant\frac{1-x^2}{\sqrt{2}-x}+x=3\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(2-x\sqrt{2}+\frac{1}{2-x\sqrt{2}}\right)\leqslant\sqrt{2},$$

因为在括号中的数有$t+\frac{1}{t}$的形式，它不小于2（且仅当$x=\sqrt{2}/2$时上不等式中等号成立）。

165．三角形AOB、BOC、COD、以及DOA的高的交点K、L、M、N是一个平行四边形的顶点，这个平行四边形的两条边位于经过A、C且分别与BD垂直的直线上，另外两条边位于过点B、D且分别与AC垂直的直线上（图68—1）。

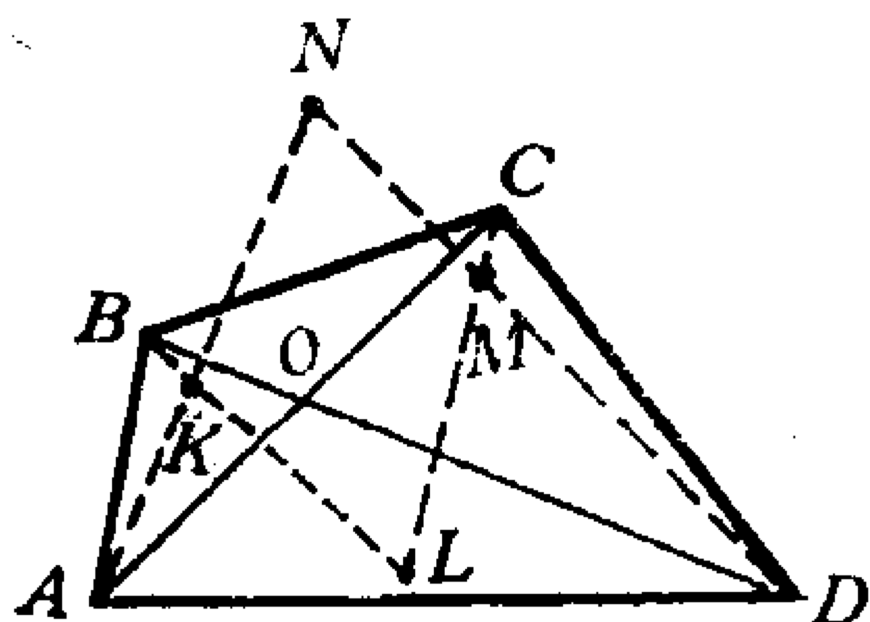


图68—1

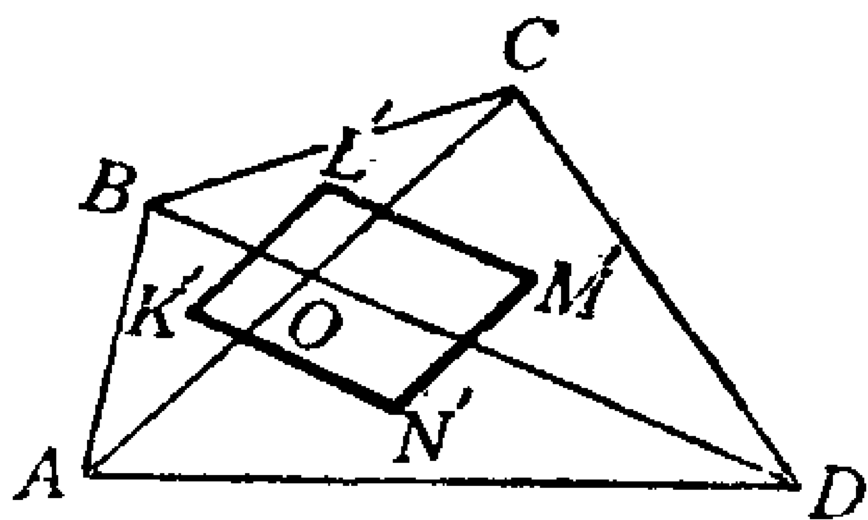


图68—2

三角形AOB、BOC、COD及DOA的中线的交点K'、L'、M'和N'也是一个平行四边形的顶点，这个平行四边形的两条边平行于BD且把线段AC分为3个相等的部分，另外两条边平行于AC且把线段BD分为3个相等的部分（图62—2）。

显然这两个平行四边形的边分别互相垂直。我们要证明这两个平行四边形相似。由此，如果把其中的一个平行四边形旋转90°，那么不仅它们的边而且它们的对角线都互相平行，即

$K'M' \perp KM$（$L'N' \perp LN$），这就是所要证的．

为了证明两个平行四边形相似需要求出它们边的比例．边$K'L'$与$K'N'$的长度分别等于$AC/3$和$BD/3$．边KL对直线BD的射影正等于线段AC对这条直线的射影，因此$KL=AC\cdot\text{ctg}\,\varphi$，这里$\varphi$是直线$AC$与$BD$的夹角；类似可得$KN=BD\text{ctg}\varphi$．于是两个平行四边形边的比例相等，都等于$AC:BD$，由此得到两个平行四边形相似．

如果角φ是直角，那么4个点K、L、M、N就是同一个点，那时就无意义了．

166．如果一条直线把正方形分成面积比为2:3的两个梯形（或矩形），那么这条直线也把位于这两个梯形中位线上的正方形的一组对边中点的连接线段分成2:3的两部分；这可由梯形的面积公式得到证明．

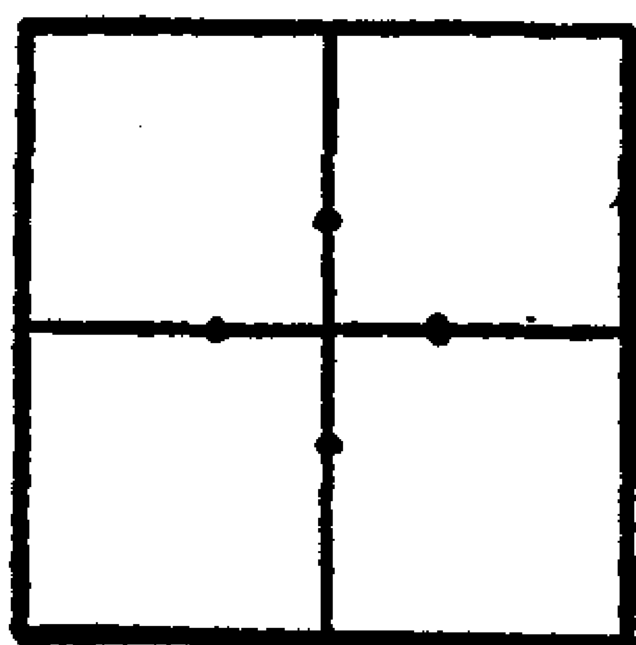


图69

把每组对边中点的连结线段分成2:3两部分的点共有4个（图69），而那样的直线共有9条，因此3条直线应该相交于这4个点中的某一个点[索9]．

167．利用关于内接角的定理得到$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3$等于下面这个和的二分之一：

$$(360°-\overset{\frown}{A_7A_1A_2})+(360°-\overset{\frown}{A_2A_3A_7})+(360°-\overset{\frown}{A_4A_5A_6})=$$
$$=720°+\overset{\frown}{A_6A_7}$$

由已知外接圆的圆心在七边形的内部，因此$\overset{\frown}{A_6A_7}$的度数不可能大于180°，所以$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3<360°+90°=450°$．

168．我们用r_1、r_2、r_3、r_4表示从左到右的4个数位．游戏分为“开局”和“终局”两个阶段，只要第二个人把某个数字放到r_1上，终局就开始．显然在开局中第一个人不应该报0至3的较小的数字，也不应该报6至9的较大的数字．因为第二个人

把那样的数字放到r_1后（把较小的数字放到下面小星星的位置上，而把较大的数字放到上面那个小星星的位置上）就能得到显然是赢的终局：如果首位数字的差不超过3，那么两数之差不大于3999．同时如果第一个人报出的第一个数字是4（或者5），那么第二个人取$r_1=\binom{4}{*}$或$r_1=\binom{*}{5}$之后立即变成了终局，然后把所有出现的数字0（相应地9）放到r_2、r_3、r_4上直到填满为止，这时他能使得到的差不小于4000．自然地，第二个人要把使得到的差不超过3999的数字放到r_1中．由于这个缘故，第一个人不可能得到比$\frac{4000}{0000}\left(\frac{9999}{-5999}\right)$更好的结果．这就是证明了1)的第二个人的策略．

但是当在开局中把某些数字4和5放入r_2、r_3和r_4并在与已有利的时刻转入终局后，第二个人能否得到更好的结果？为了阻止第二个人成功，第一个人应该注意有最小i的数位r_i，在r_i中有一个数字和一个小星星或者两个不同的数字．如果r_1等于$\binom{*}{4}$或者$\binom{*}{5}$，第一个人应该报数字5；如果r_1等于$\binom{4}{*}$或者$\binom{5}{*}$，他应该报数字4（如果所有数位都相同或者$r_i=\binom{5}{4}$，则可以报任何数字，比如报5．而当第一个人采取这种策略时不可能出现$r_i=\binom{4}{5}$这种危险的情形）．在由那样的开局转为终局之后，如果第二个人把数字放到r_1中上边那个位置，那么第一个人可能报数字0；如果相反，则第一个人可能报数字9．这是证明2)的第一个人的策略．

注　可以证明，当有$n\geqslant1$个数位时在这种游戏中得到的最好的结果是$4\cdot10^{n-1}$．

169．答案：S的可能最大值等于$\sqrt{2}$．当$x=\sqrt{2}$，

$y=\sqrt{2}/2$时达到最大值。

我们应该搞清楚，当S最大取什么值时可以同时满足3个不等式$x\geqslant S$，$y+1/x\geqslant S$，$1/y\geqslant S$（其中至少有一个应该取等号）。显然可以认为S是正的，例如$S=1$时三个不等式一致（可取$x=1$，$y=1$）。由前述三个不等式得到以下不等式：$y\leqslant 1/S$，$1/x\leqslant 1/S$，$S\leqslant y+1/x\leqslant 2/S$。由此$S^2\leqslant 2$，$S\leqslant\sqrt{2}$。这三个不等式可能变成等式$y=1/x=\sqrt{2}/2$，同时$S=\sqrt{2}$。

170．如果凸多边形是三角形ABC，这个证明很容易：如果点O在三角形ABC的内部，那么三角形AOB、BOC、COA都是等腰三角形，所以$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COA$中至少有两个大于120°，不妨设这两个角是$\angle AOB$和$\angle BOC$，则有$AO=BO=OC$。把这个特殊情形看作引理，我们来证明关于一般多边形的结论。如果A和B是多边形的任意两个顶点，那么或者在由AO和BO的延长线所构成的交角中有多边形的顶点C，或者这个角的两条边与多边形的边DE相交（图70）。在第一种情形中点O在$\triangle ABC$的内部，正如上面所证，$AO=BO=CO$；在第二种情形中，O在$\triangle BDE$和$\triangle ADE$的内部，因此$AO=DO=EO=BO$。

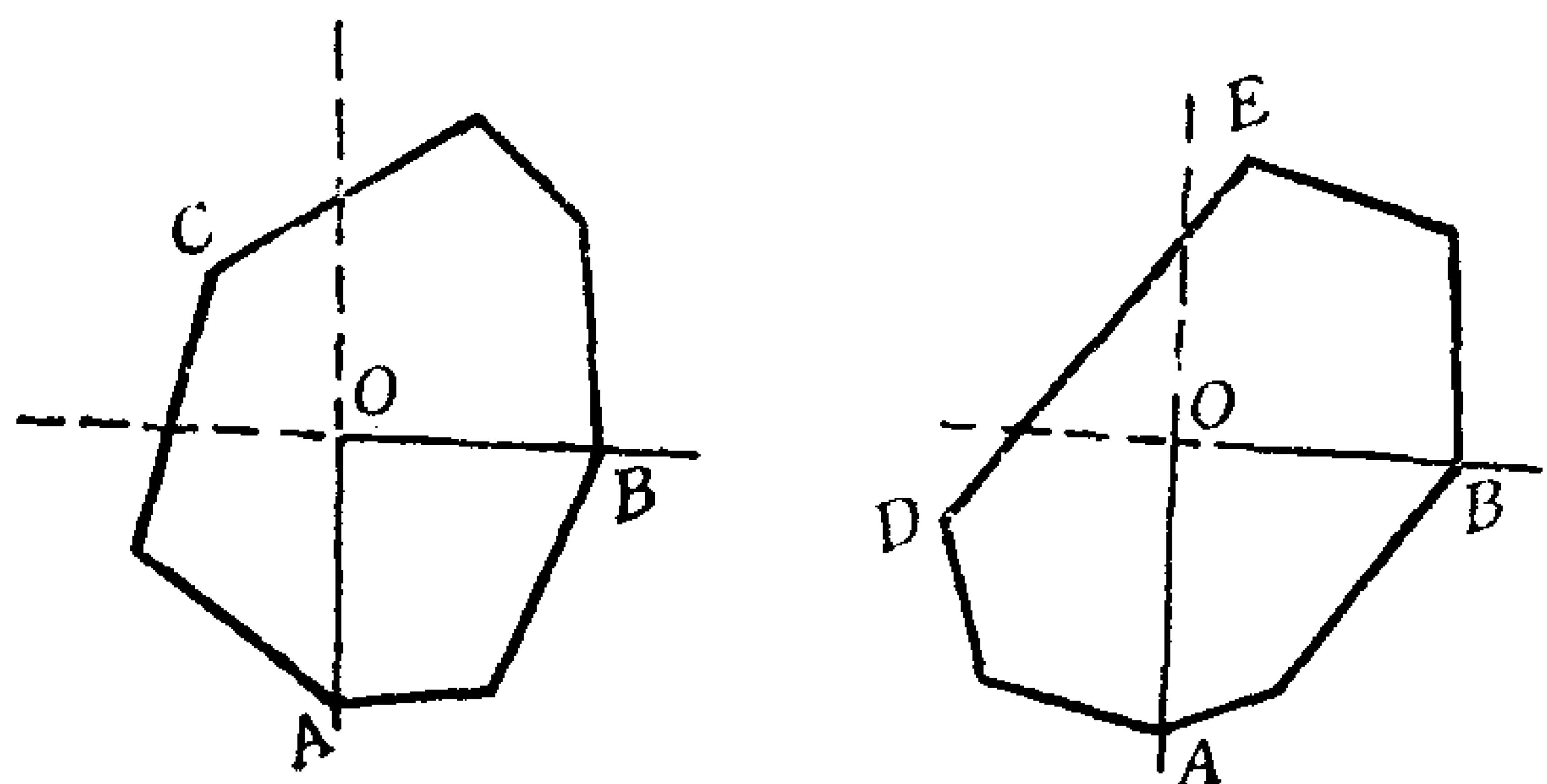


图70

171．答案：不可能。

设在任何3×4个格子的矩形中都包含有三个0、四个1和五个2。

如果在两个图形中有相同个数的0、1和2，我们就说它们的填法相同。图71—1中用斜线标出的矩形填法相同（把3×3的正方形接到两个相邻的矩形上分别构成3×4的矩形，再从标准的3×4矩形中去掉所包含的正方形）。此外，1×12的长条与3×4的矩形所含数字的个数总相同，即在其中有五个2（在图71—2中用相同字母表示的矩形的填法相同）。

另一方面，我们来考察（不在纸边缘上的）至少含有两个2的3×1的矩形a，这样的矩形在任何由4个3×1的矩形组成的、且含有五个2的任何3×4矩形中都能找到。现在把1×12的长条与a进行比较，如图71—3中虚线部分所示。那么在这个长条中至少有六个2。矛盾。

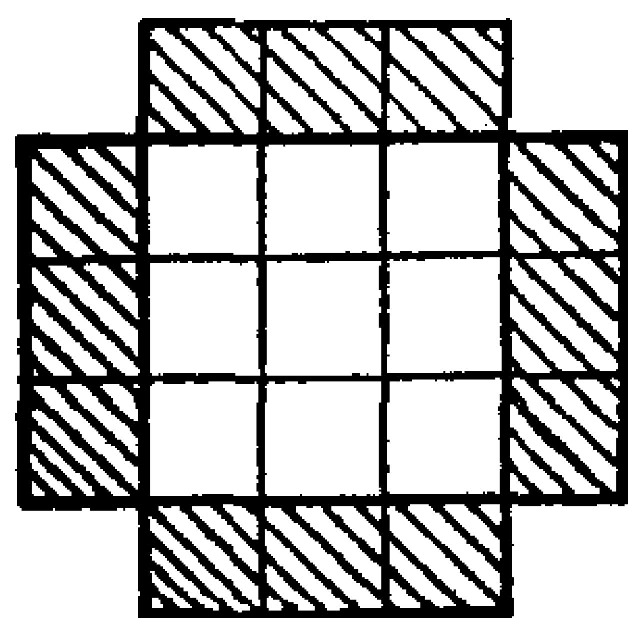


图71—1

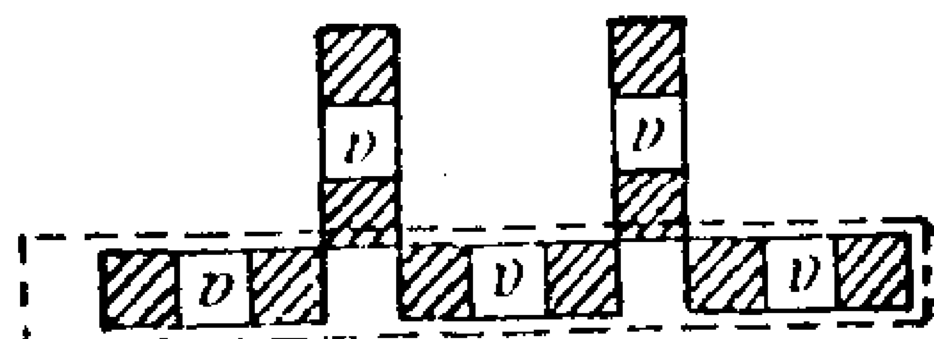


图71—2

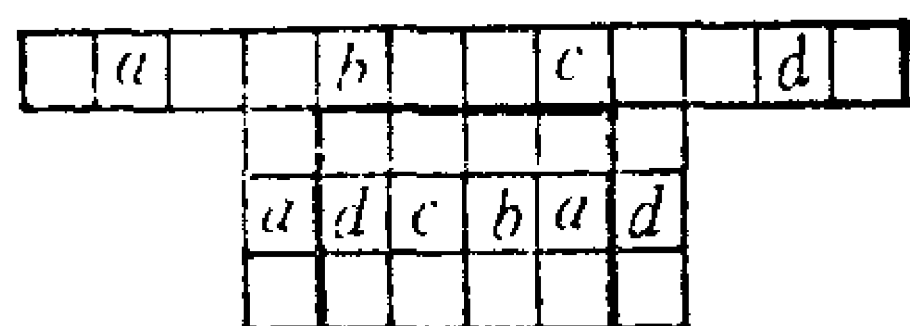


图71—3

172. 答案：S的最小值等于$1-2^{-1/n}$，当$x_k=2^{k/n}(1-2^{-1/n})$时达到最小值。

设$y_0=1$，$y_k=1+x_1+\cdots+x_k$($1\leqslant k\leqslant n$)。那么$y_n=2, x_k=y_k-y_{k-1}$，如果所有已知数不超过S，即

$$\frac{x_k}{y_k}=\frac{y_k-y_{k-1}}{y_k}=1-\frac{y_{k-1}}{y_k}\leqslant S,$$

则$1-S\leqslant y_{k-1}/y_k$。把这些不等式连乘（$k=1, 2, \cdots, n$)，我们得到$(1-S)^n\leqslant y_0/y_n=1/2$，由此$S\geqslant 1-2^{-1/n}$。这个最小值能达到。当（对一切$k$）$2^{-1/n}=1-S=y_{k-1}/y_k$，即当$y_k$构成几何级数$y_1=2^{1/n}$，$y_2=2^{2/n}$，…，$y_n=2$时达到最小值，此时$x_k=2^{k/n}-2^{(k-1)/n}$。

173. 我们用0来代替循环赛记分表中的一切偶数，而用1代替所有奇数，用A表示所得到的表格，A的元素用a_{ij}表示，如

果第i个队与第j个队打成平局，则$a_{ij}=1$，在相反情形$a_{ij}=0$．于是这张表格是对称的且在对角线上都是0：

$$a_{ij}=a_{ji}，且a_{ii}=0，对于一切i、j \quad ①$$

此题对表格提出的要求可这么来得到：对于异于$0=(0, 0, \cdots, 0)$的、且由0和1组成的任何一组数$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \quad (A)$$

中至少一个是奇数、对于每一组球队我们来构造一组数x：如果第j个球队是这个组的成员，则取$x_j=1$，否则取$x_j=0$。这里y_i等于第i个队与本组球队平局的次数．我们将用Ax表示由x与表格A按照规则（A）所得到的数组（$y_1, y_2, \cdots, y_n$）．

因为我们感兴趣的只是偶数与奇数之间的差别，所以表格中只有数字0和1对于计算是方便的，并假设$0+1=1+0=1$，$1+1=0+0=0$．（这里乘法法则和其它所有运算法则都适用．）那么y也将是由0和1组成的数组．这里对表格的基本要求是：

$$如果x\neq 0，那么y=Ax\neq 0 \quad ②$$

把这样的表格称为非退化的表格．

现在冰球队的比赛问题就完全变成了代数问题：证明当n为奇数时条件①和②不可能同时成立．下面我们要简化表格A并保留这些条件．

如果把A的第二行加到第一行得到新的表格A'，条件(2)仍将保留：如果$Ax=y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，那么对于新的表格$A'$有$A'x=y'=(y_1+y_2, y_2, \cdots, y_n)$；所以若$y\neq 0$，则$y'\neq 0$．如果把$A$的第二列加到第一列得到新矩阵$A''$，条件(2)也保留不变：如果$Ax=y$，这里$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，那么对于新表格$A''$将有$A''x''=y$，这里$x''=(x_1+x_2, x_2, \cdots, x_n)$；如果$x\neq 0$，则$x''\neq 0$．毫无疑问，也可以把$A$的第$i$行加到第$j$行，或者把第$i$列加到第$j$列；如同时做行与列的这样的两个变换，那么新表格不仅仅是满足②也是满足①的表格（这里$1+1=0$的法则使对角线

上的数仍等于0）.

现在我们着手简化A. 可以认为"前两个队打了平局"，即$a_{12}=a_{21}=1$. 把第一行（列）加到在第二列中（相应地在第二行）有1的那些行（列）上，这样就去掉了第二列（第二行）中其余所有的1；同样利用第二行（第二列）也能去掉第一列（第一行）中其余所有的1. 这样在去掉前两行和前两列之后就得到了新表格A_{n-2}，如图72—1所示. 这个新表格A_{n-2}也满足条件①、②；要知道，对于任何$x=(0, 0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-2})$，$Ax\neq 0$；若记$x'=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则对于$x'$和$A_{n-2}$同样也有$A_{n-2}x'=0$. 继续做这样的简化，就能得到表格$A_{n-4}$，$A_{n-6}$，…. 如果$n$是奇数，就能得到3×3的表格，再进行简化后就得到$A_3$，如图72—2所示. 然而它是退化的，因为如果$x=(0,0,1)$，则有$A_3x=0$. 这就得到了矛盾.

$$\begin{array}{|cc|ccc|}\hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \cdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline\end{array}$$

图72—1

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

图72—2

注　此题的内容与线性代数中一个定理相同.（此定理是说：当n是奇数时，$n\times n$的反对称矩阵是退化的.）

第七届

174. 我们来解2). 鉴定人应该这样进行3次称量：

1°. 他把第1个硬币放到左边的盘子中，把第8个硬币放到右边盘子中. 因为右边的盘子过重，那么法官断定第1个硬币是假的，而第8个是真的.

2°. 鉴定人把第2、第3和第8个硬币放到右边的盘中，而

把第9、第10和第1个硬币放到左边的盘中．左边的盘子过重，因而法官确认第2个和第3个硬币是假的，而第9个、第10个硬币是真的．

3°．鉴定人把第4、第5、第6、第7、第8、第9和第10个放到左边的盘中，而把其余的放到右边的盘中．右边的盘子过重，因而法官看到右边盘子上的真硬币比左盘上的多，而在左边盘子上的假硬币比在右盘上的多．这向法官证明：第4、第5、第6、第7个硬币是假的，而第11个、第12个、第13个和第14个硬币是真的．

注 当$k\geqslant1$时，同样也能k次称量来验证2^k-1个假硬币和2^k-1个真硬币．

175．假设存在满足此题要求的完全平方数$D=A^2$．显然，数A的末位数字是5，即$A=10a+5$．因此$D=100a(a+1)+25$，它以25结尾．而$a(a+1)$或者以2、或者以6、或者以0为末位数字，因此数D的从右边数第3个数字等于6，于是$D=1000k+625$．我们看到，D能被$5^3=125$整除，因而也能被5^4整除．因此k能被5整除，这就是说D的从右边数第4个数字或者等于0、或者等于5．然而这是不可能的．

176．用数学归纳法来证这个题．对于$n=3$、$n=5$和$n=6$所要求的点组表示在图73（1—3）中．而在图73—4中表示了从n

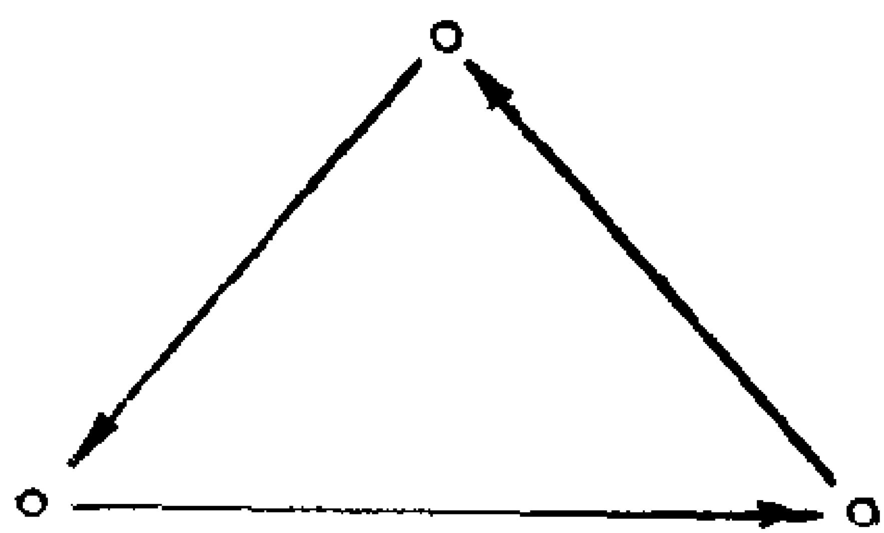


图73—1

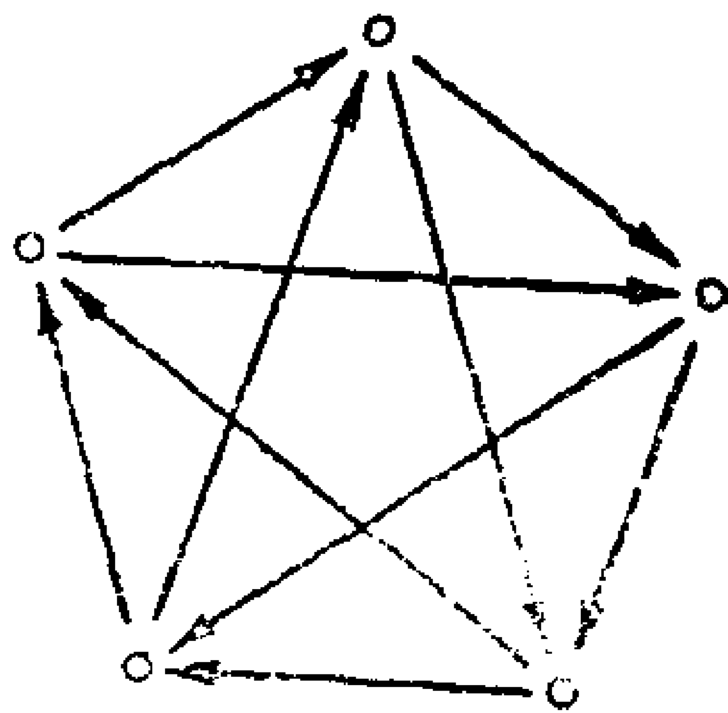
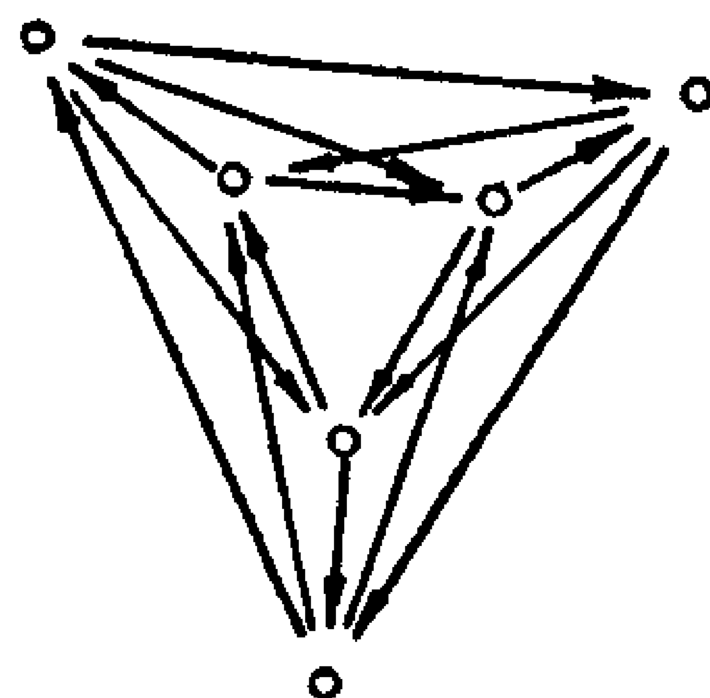


图73—2

点组A_1、A_2、…、A_n得到所需要的（$n+2$）点组A_1、A_2、…、A_n、A_{n+1}、A_{n+2}的一种方法，这里A_1、A_2、…、A_n由箭头用所

需的方式所连接。为了得到$(n+2)$点组只要再画出从A_{n+1}指向所有点A_1、…、A_n的箭头，然后从每一个点A_1、A_2、…、A_n画出到A_{n+2}的箭头，最后从A_{n+2}作出到A_{n+1}的箭头。


图73—3

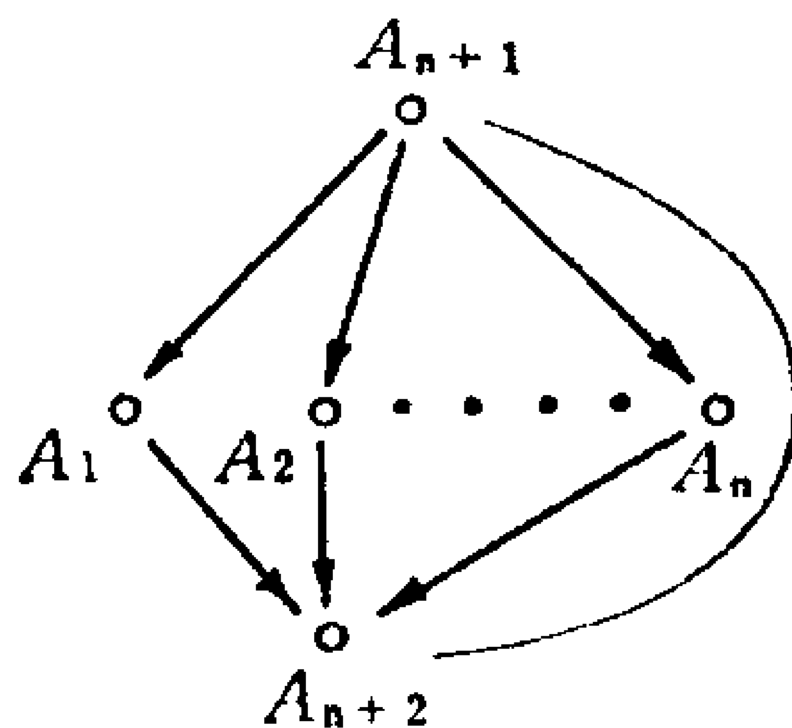


图73—4

由完全归纳法原理此题结论对于一切$n\geqslant3$的奇数和一切$n\geqslant6$的偶数成立。

当$n=4$时所要求的点组不存在。

177. 设P和Q是已知圆周在点C的切线与已知角两条边的交点。因为$AP=PC$，那么$\triangle APC$、$\triangle OPQ$是等腰三角形。因此$AO=CQ=OB=BQ$（图74）。

注意到$\angle OAE=\angle OCA=\angle COQ$，$\angle AOB=\angle CQB$。由$\triangle OAK\backsim\triangle QOC$得到

$$\frac{OK}{OA}=\frac{CQ}{OQ}=\frac{1}{2}.$$

就是说$OK=OA=OB/2$。

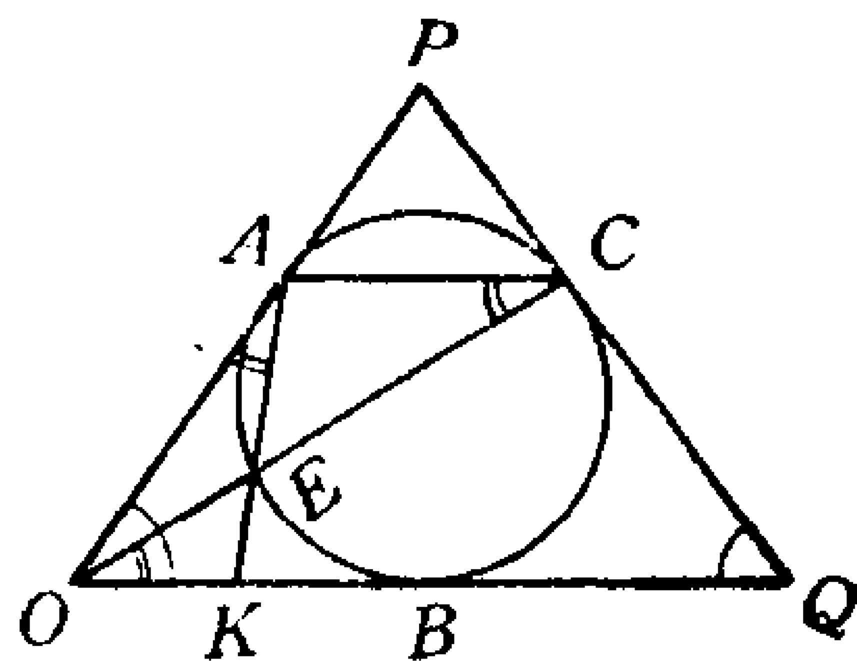


图74

而由弦切角定理得到$\angle OAE=\angle ACO$。

178. 设$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=cx^2+bx+a$。因为$f(1)=g(1)$、$f(-1)=g(-1)$，那么$|g(1)|\leqslant1$且$|g(-1)|\leqslant1$，此外$|c|=|f(0)|\leqslant1$。

假设存在使$|g(x)|>2$的点x，那么抛物线$y=g(x)$的顶点坐标为$(x_0, g(x_0))$，$|x_0|\leqslant1$，$|g(x_0)|>2$。分出完全平方后，我们得到$g(x)=c(x-x_0)^2+g(x_0)$。取$x=1$或-1（取与x_0最近的数），

为确定起见不妨设$x=1$。那么$|1-x_0|\leqslant 1$，因此$|g(x_0)|=|g(1)-c(1-x_0)^2|\leqslant|g(1)|+|c|\leqslant 1+|c|\leqslant 2$，这与$g(x_0)>2$矛盾。

$f(x)=2x^2-1$表明不可能再改进$|g(x)|\leqslant 2$这个估计（此时$g(x)=-x^2+2$）。

179. 答案：优胜者可能最大的号码为20。

因为号码为k的网球运动员只可能输给第$k+1$号和第$k+2$号运动员，那么在每一轮之后优胜者中最强运动员的号码增大的幅度不超过2，于是循环赛优胜者的号码不超过21。但是我们要证明第21号运动员不可能成为优胜者。为此在第一轮之后，第1号和第2号运动员应该退出，他们输给了第3号和第4号（否则优胜者的号码将小于21）。在第2轮中应该退出的是第3号和第4号，而第5号和第6号战胜了它们，等等。直到第9轮，在其中第19号和第20号应该战胜第17号和第18号。于是第21号运动员不参加两人相遇的终局比赛。

下面举一个第20号运动员为优胜者的循环赛的例子。为此把所有运动员分成两组，每组512人，在第一组中包括第19号、第20号以及510个更弱的运动员。在这组里循环赛要组织得使第20号运动员能取胜（显然可以做到这一点）。第二组中有第1号、第2号、…、第18号以及更弱的运动员，同时组织循环赛使第18号能取胜。这一点也可以做到，只要这么组织比赛：在第一轮中第3号、第4号赢第1号、第2号；在第二轮中第5号、第6号赢第3号、第4号；依此类推，直到第八轮，第17号、第18号赢第15号、第16号。此后在第九轮中第18号赢第17号。终局中第20号与第18号相遇，所以第20号可能取胜。

注　可用数学归纳法证明：当有2^n个运动员时，优胜者的最大号码为$2n$。

180. 如果方程$f(x)=x$没有根，那么，或者对于一切x有$f(x)>x$（若$a>0$），或者对于一切x有$f(x)<x$（若$a<0$）。于

是就有$f(f(x))>f(x)>x$，或者$f(f(x))<f(x)<x$，这就是说，方程$f(f(x))=x$没有根.

注　此题的结论不仅对二次三项式而且对任意连续函数都成立.

181. 1)我们指出，如果再把若干个黑格添补到已有的黑格集合上，则在重新涂色之后可能只出现另外的黑格. 我们把一些格子加到原集合M上，使得到$m\times m$个格子的黑正方形.

经过$2m-1$次涂色后正方形中（即M中）没有任何黑格子.

2)用M_t表示集合M经过t次涂色之后所得到的黑格的集合. 我们要用归纳法来证明，对于有n个格子的任意集合M，M_n是空集. 当$n=1$时，这是显然的. 设对于少于n个格子的集合这一点已证. 我们来考察有n个格子的任意集合M，可以认为M在坐标平面O_{xy}的第一象限内，同时在带形$0\leqslant x\leqslant 1$和$0\leqslant y\leqslant 1$中都至少有一个M的格子（图75）. 那么根据归纳假设，M_{n-1}不与角域$x\geqslant 0$，$y\geqslant 1$相交（在带形$0\leqslant x\leqslant 1$中的格子不影响在$x\geqslant 1$的区域进行重新涂色），所以M_{n-1}在带形$0\leqslant x\leqslant 1$中，类似可证明M_{n-1}在带形$0\leqslant y\leqslant 1$中，就是说M_{n-1}只能含有1个格子，而M_n是空集.

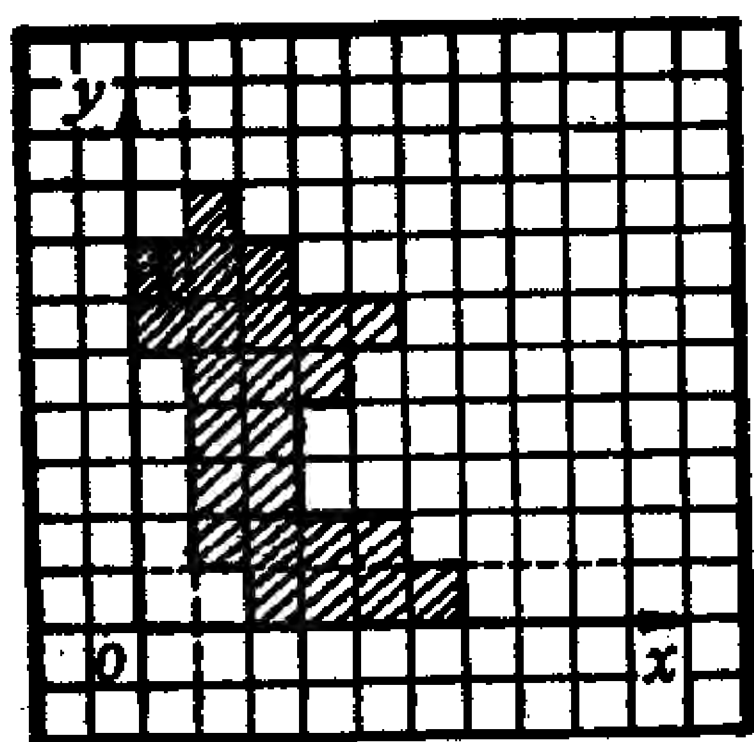


图75

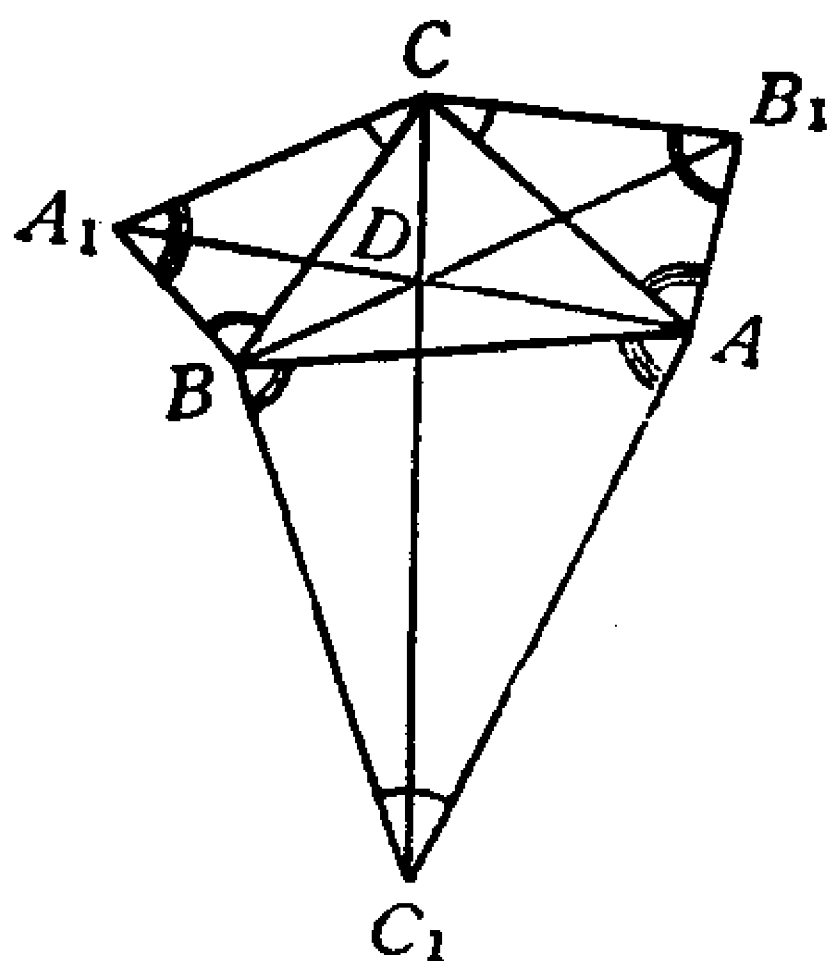


图76

182. 设D是AA_1与BB_1的交点. 因为$\angle A_1CA=\angle B_1CB$（图76），$A_1C:BC=AC:B_1C$，三角形$A_1CA$相似于三角形

B_1CB，所以$\angle DBC=\angle DA_1C$．因此B、D、C、A_1四个点在一个圆周上，这也证明了A、D、C、B_1四个点在同一圆周上，即点D是三角形A_1BC和三角形AB_1C的两个外接圆的交点．

注意到$\angle ADB=180°-\angle ADB_1=180°-\angle AC_1B$，因此点$A$、$D$、$B$、$C$在同一圆周上．于是点$D$是所有三个外接圆的交点，而根据前面的证明知直线$CC_1$经过点$O$．

183．可用数学归纳法来解这个题．

我们用1至N的数把N个人编号．如果$|i-j|\leqslant N/2$，就把号码为j的人介绍给号码为i的人．容易看到，当采用这种结识方法时，只有号码为k与$N-k$的人有相同数量的熟人．所以任意3个人不可能有相同数量的熟人．

184．1)参看图77—2．

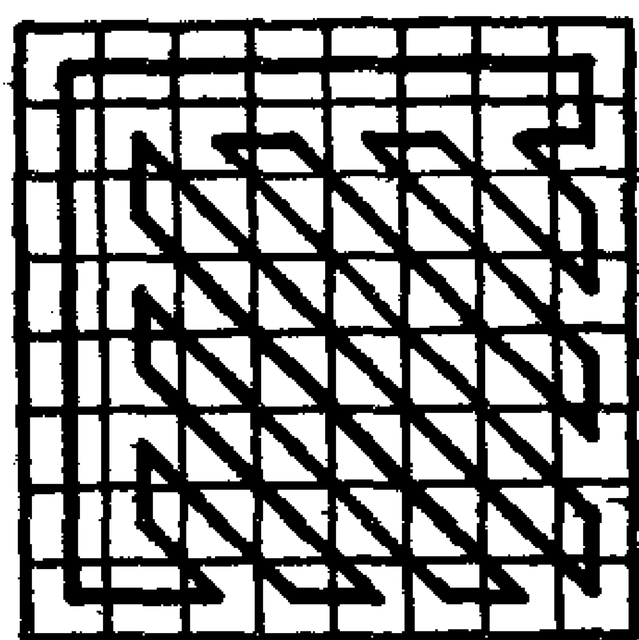


图77—1

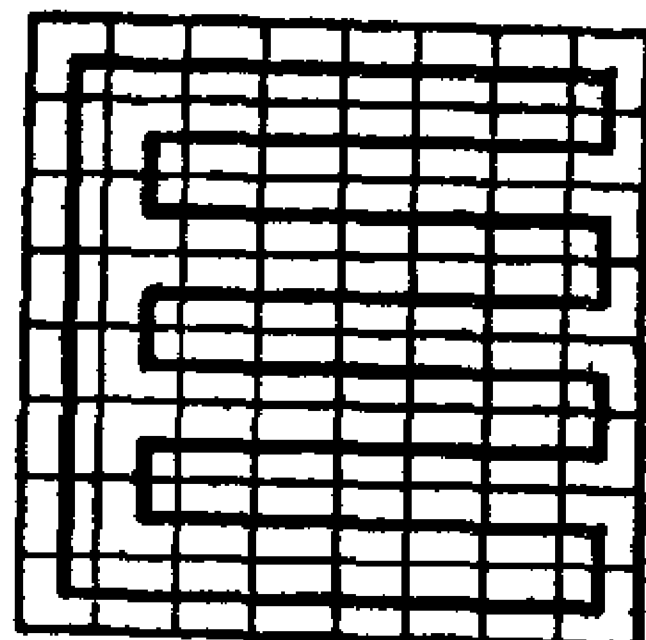


图77—2

2)我们在棋盘上分出由28个边格组成的边，王在走遍整个棋盘时曾到过其中的每一个格子．再把这些格子按照王走过它们时的先后顺序编号．王的整个路线分为28段：从格子1到格子2；从格子2到格子3；…；从格子28到格子1．而且王的路线不自相交，因此格子1和格子2，格子2和格子3，…格子27和格子28，格子28和格子1是边中相连的格子（例如，如果格子1和格子2不相邻，则它们把边分成两部分，而当王从某一部分中的任何一个格子走到另一部分的任何一个格子时，它的路线要与格子1或者格子2相交，这与已知条件矛盾．）但是为了走到相邻的

边格中去，王应该在某一步中从一种颜色的格子改走到另一种颜色的格子，即或者沿着垂直线走，或者沿着水平线走。由此得出在王的路线中至少要走28步。

3）显然，王走过的路线长度不小于64，而且存在最短路线（图77—2）。另一方面，我们证明了王的路线至少含有28条长度为1的线段。所以王能够沿对角线至多走36步，因而整个路线的长度不超过$28+36\sqrt{2}$（这种路线的例子见图77—1）。

185。因为$1\leqslant bc/2\leqslant b^2/2$，$b\geqslant\sqrt{2}$。

186。设每条直线都等分多边形M的面积。那么多边形落在由这些直线构成的每一对对顶角里的部分有相等的面积（图78中的S_1、S_2有相等面积）。

我们把已知多边形M和它关于点O对称的多边形M'一起考察。如果有k条等分面积的直线经过点O，那么这k条直线所成的$2k$个角中都应该有M与M'的边界的交点。但在多边形的每一条边上至多有两个那样的交点。就是说，如果M有n条边，那么交点的个数不少于$2k$个也不多于$2n$个，由此$k\leqslant n$。

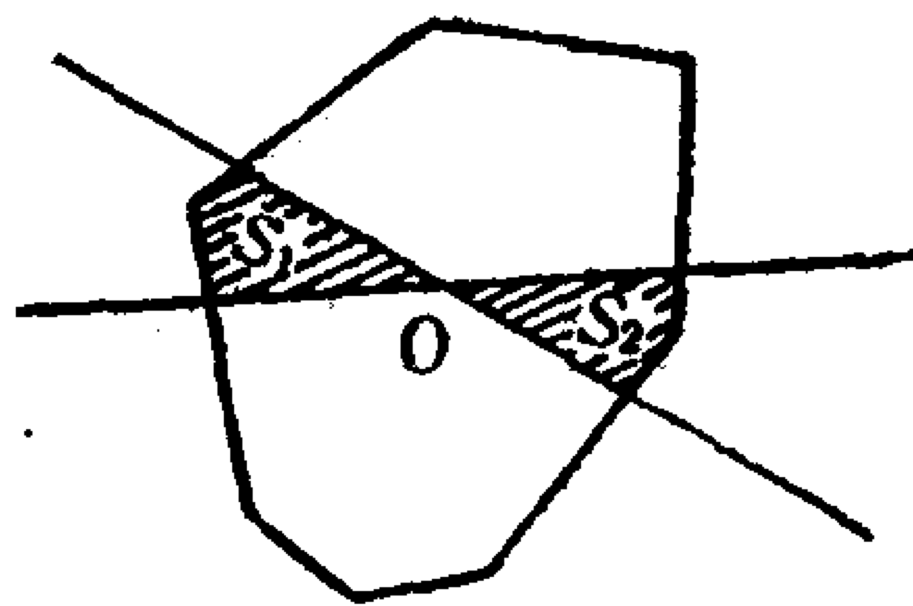


图78

187。如果$x_2>x_1$，那么所要证的不等式可由下面的恒等式得出：

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2$$
$$=4(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)$$
$$=4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$$
$$+4x_5(x_2-x_1)+4x_1x_4.$$

如果$x_1>x_2$，那么可由下列恒等式得出

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-(x_1-x_2-x_3+x_4-x_5)^2$$
$$=4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5)+4x_3(x_1-x_2)+4x_2x_4.$$

注　一般地，不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \geqslant c_n(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)$$

对于下列（最大的）c_n成立：$c_2=2$，$c_3=3$，$c_4=4$（同时在c_n取这些值时不等式对于所有不一定为正的x都对），当$c_n=4$时，对于一切$n\geqslant 5$（$x_i>0$）也成立．最后的结论可从$n=5$的情形出发用归纳法来证：如果依次连续地移动足码使x_{n+1}为最小，那么

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{n+1})^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$$
$$\geqslant -4x_1x_n+4x_1x_{n+1}+4x_nx_{n+1},$$

这是因为

$$2x_{n+1}(x_2+\cdots+x_{n-1})+(x_{n+1}-2x_1)(x_{n+1}-2x_n)\geqslant 0.$$

188．答案：29个平行六面体．

可以指出，如果指定了六面体的任意顶点和三个“中间”平面（其中每一个平面都与六面体的所有顶点等距，即经过六面体的中心且与六面体的面平行），那么六面体能单一地被确定．

对于4个已知点K、L、M和N（不属于一个平面）存在7个与这些点等距的平面（它们与四面体$KLMN$相交于棱的中点）．可以用$C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35$种方法从这7个平面中选出三个平面．

但是我们需要的只是三个相交于一点的平面，因此应该从35组三个平面中去掉平行于一条直线的那些三个平面．共有6组这样的三个平面，它们平行于四面体6条棱中的一条．从$35-6=29$组三个“中间”平面中选择一组，我们就能根据已有的4个顶点来单一地建立一个平行六面体——为此只要过这些顶点作平行于“中间”平面的平面．

注　在杂志《Квант》（1974，№5，С．50）中用完全另外的计算方法画出了所有29个平面，在这个方法中，29是作为

1＋4＋12＋12的和得到的。

第　八　届

189．答案：1)10个问题；2)11个问题；3)12个问题；4)50个问题。

1)把30个数分成10个3数组并打听每组中3个数的乘积，显然提较少的问题是不行的，因为每一个数应该在一个3数组中。

2)把$a_1a_2a_3$、$a_1a_4a_5$和$a_1a_6a_7$连乘后，求出前7个数的乘积，再把其余24个数像1)中那样分成3数组，因此在这种情形中提较少的问题显然是不行的。

3)　把$a_1a_2a_3$、$a_1a_2a_4$和$a_1a_2a_5$连乘后，求出前5个数的乘积，把其余的数分成3数组。

因为任何数应该在某3数组中，显然至少要提11个问题。

这里有一个数恰好在两个3数组中（如果多于两个3数组，则存在一个数，它不在任何一个3数组中）。这个数的平方在所有11个3数组的乘积中，所以用11个问题我们不能打听到所有数的乘积。

4)　用50个问题能打听出$a_1a_2a_3$、$a_2a_3a_4$、$a_3a_4a_5$、…、$_{50}a_1a_2$的乘积，把它们连乘后，我们得到50个数乘积的立方，它就等于这50个数的乘积。

少于50个的问题不够用。例如，如果我们不知道$a_1a_2a_3$的乘积，那么存在具有不同乘积的两组数，对于这两组数来说，所有其余三个数的乘积相同：在其中一组中，$a_1=a_3=a_6=a_9=\cdots=a_{48}=1$，其余数都等于-1；另一组全由1组成。第一组中所有三个数的乘积，除了$a_1a_2a_3$外都等于1；在第二组中所有乘积都等于1。

注　对于可以打听出其中任意3个数乘积的n个数，像1)—3)那样，提问题的个数至少等于：k（如果$n=3k$）；$k+1$（如果$n=3k+1$）；$k+2$（如果$n=3k+2$）。如果只允许打听沿圆周写着的三个数的乘积，当n被3整除时，应该提$n/3$个问题；而当n不能被3整除时，应该提n个问题。

190．答案：$11=36-5^2$。

数$36^k=6^{2k}$的末位数字等于6，5^i的末位数字等于5，因此数$|6^{2k}-5^i|$或者以1结尾（如果$6^{2k}>5^i$），或者以9结尾（如果$6^{2k}<5^i$）。

等式$6^{2k}-5^i=1$是不可能的，否则$5^i=(6^k-1)(6^k+1)$，而数6^k+1不能被5整除。当$k=1$和$i=2$时，我们得到$36^k-5^i=11$。

等于$5^i-6^{2k}=9$也不可能成立，因为对于自然数i，5^i不可能被3整除。

191．1)答案：不总可以。例如，如果在边长为2的正三角形的每一边上作高为1/10的等腰三角形，那么所得到的六边形的所有边都将大于1，而所有对角线不大于2。

2) 答案：总可以。三条对角线AD、BE和FC中存在夹角不小于60°的两条。例如设它们为AD和BE。作平行四边形$BEDK$，因为$BE=DK>2$，$AD>2$以及$\angle ADK=\alpha\geqslant 60°$，那么$AK>2$，但是$AB+BK\geqslant AK$。因此或者$AB>1$，或者$ED=BK>1$。

192．由三角形O_1K_1P和三角形PK_2O_2相似（见图79），我们得到$K_1P\cdot PK_2=Rr$，而由三角形$A_1K_1O_1$和三角形$A_2K_2O_2$相似得到$A_1K_1\cdot K_2A_2=Rr$。现在不难得到$K_1P=PK_2=B_1=\sqrt{Rr}$，以及$A_1K_1+K_2A_2\geqslant 2\sqrt{Rr}$（算术平均不小于几何平均）。于是如果使$K_2A_2=\sqrt{Rr}$的点$A_2$在$K_2$和$L$之间，那么梯

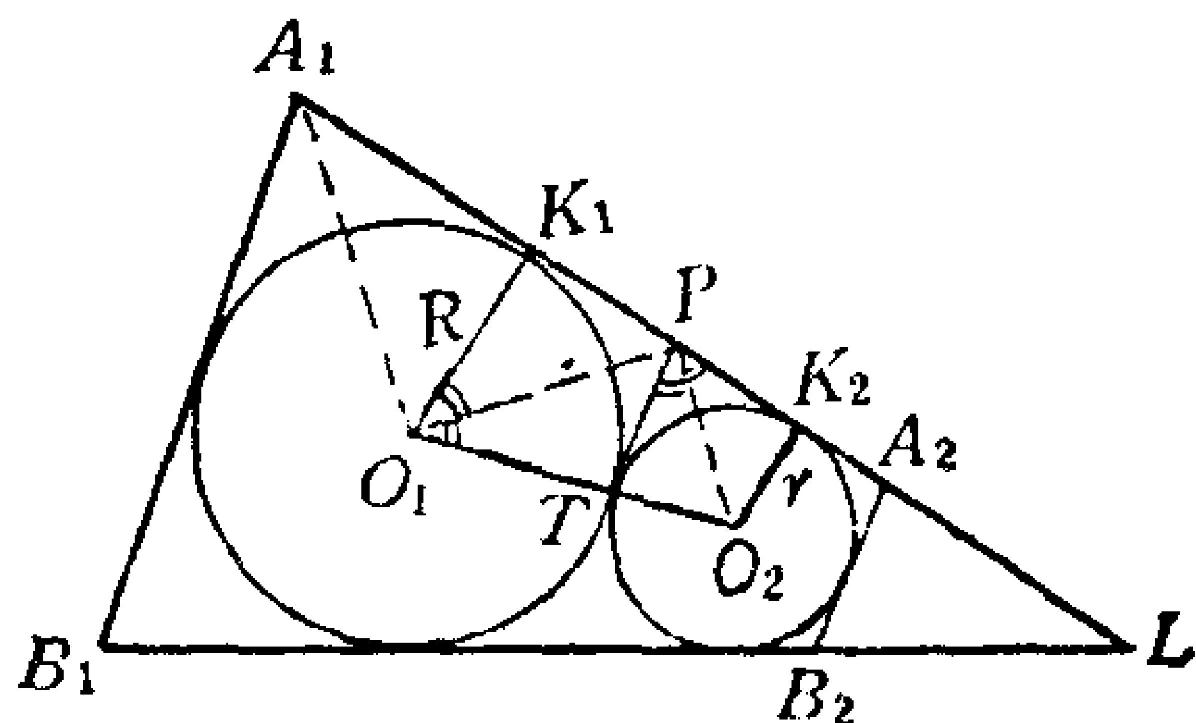


图79

形的最短腰的长度等于$A_1K_1+K_1K_2+K_2A_2=4\sqrt{Rr}$。如果$A_2K_2\geqslant K_2L$，即$\sqrt{Rr}\geqslant\sqrt{Rr}\cdot 2r/(R-r)=q$，$R\geqslant 3r$，那么$A_1A_2>2\sqrt{Rr}+q+\dfrac{Rr}{q}=\sqrt{Rr}\dfrac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$。

于是，如果$3r>R$，那么腰的最小长度等于$4\sqrt{Rr}$。

如果$3r\leqslant R$，那么具有最短腰的梯形不存在。同时可以证明，腰的长度大于$\sqrt{Rr}\dfrac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$（精确估计）。

193. 把所有向量都放到某一点o。

要证明，如果已经选好k个向量，它们的和$\vec{s}=\overrightarrow{OS}$（图80），$|s|\leqslant 1$，那么可以从其余向量中或者选择1个向量$\vec{a}$，使$|\vec{s}+\vec{a}|\leqslant 1$，或者可选择两个向量$\vec{b}$、$\vec{c}$，使$|\vec{s}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant 1$。

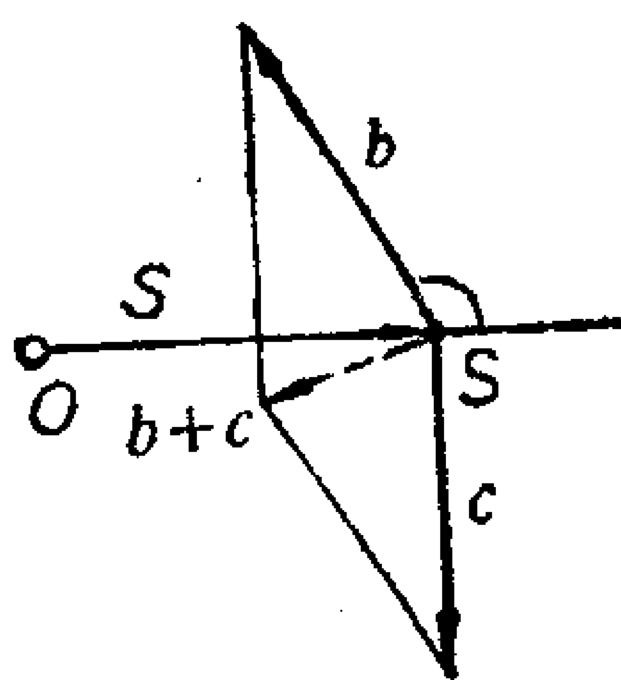


图80

事实上，如果在其余向量中有向量$\vec{a}$使$\angle(\vec{a},\vec{s})\geqslant 120^\circ$，则$|\vec{s}+\vec{a}|\leqslant 1$。如果没有那样的向量，因为直线$OS$的两侧都有向量组中的向量，那么可以在$OS$的一侧的半平面中，选择与向量$s$构成最大角的一个向量作为$\vec{b}$。同样也可以在$OS$的另一侧的半平面中选择向量$\vec{c}$。显然，$\angle(\vec{c},\vec{s})$与$\angle(\vec{b},\vec{s})$中有一个是钝角，而$\angle(\vec{b},\vec{c})>120^\circ$.不妨设$\angle(\vec{b},\vec{s})>90^\circ$，那么$|\vec{s}+\vec{b}|<\sqrt{2}$，而$\angle(\overrightarrow{b+c},\vec{s})>120^\circ$，因此$|\vec{s}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant 1$。于是如果首先把向量$\vec{b}$、再把向量$\vec{c}$归并到和为$\vec{s}$的向量组中，那么每一步之后的和的长度应该小于$\sqrt{2}$。

注 我们证明了可以用$\sqrt{2}$代替2。更精细的推理表明，总可以把向量编号，使最初的向量之和的长度不超过$\sqrt{5}/2$，同时这个估计已很精确了。例如，$2n+1$个向量中一个向量为$(-1,0)$，n个为$(1/n,\ \sqrt{1-1/n^2})$，另外n个为$(1/n,-\sqrt{1-1/n^2})$。这个例子表明，常数$\sqrt{5}/2$不能代之以较小的数。

又注　也可证明m维空间中的类似定理即施泰尼茨引理，同时对于任意向量范数，相应的施泰尼茨常数不超过m。

194．答案：数a、b、c中的两个等于0，第三个为± 1（共6个解）。

首先把$x=y=z=1$代入已知条件，然后把$x=y=0$，$z=1$，最后把$x=1$，$y=-1$，$z=0$代入已知条件中去，得到$|a+b+c|=1$，$|a|+|b|+|c|=1$，$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2$.因为$|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$，那么，所有数a、b、c的符号相同，即$ab\geqslant 0$，$bc\geqslant 0$，$ac\geqslant 0$.可是，不等式

$|a-b|+|b-c|+|c-a|\leqslant 2|a|+2|b|+2|c|=2$（由$|a-b|\leqslant|a|+|b|$以及两个相似不等式得出）中的等号只当$ab\leqslant 0$，$bc\leqslant 0$，$ac\leqslant 0$时成立。由此$ab=bc=ac=0$，因而$a$、$b$、$c$之中的两个等于0，而第三个的模等于1（这可从三个方程中的任何一个看出）。

195．设F为直线BH和AD的交点(图81)．由三角形ABF和三角形BPC全等（直角边和锐角相等）得出：$AF=BP=BQ$，$FD=CQ$；因此$QCDF$为矩形．它的外接圆周经过点H(FC为这个圆周的直径，而$\angle FHC=90°$)．因为DQ也是直径，则有$\angle DHQ=90°$。

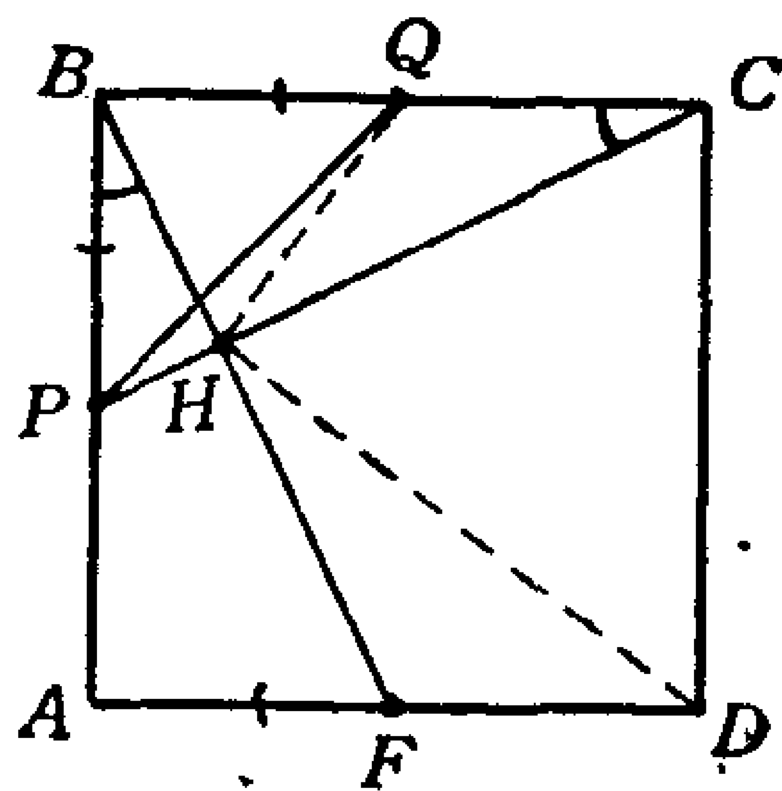


图81

196．为了证明只要注意到，在把任何一个“奇”点重新涂成其它颜色后，端点颜色不相同的线段的条数至少减少1．因此重新涂色只能进行有限次，有限次重新涂色后就不存在任何奇点了。

197．答案：$n=k$，且$k=1$、8或9。

如果n^n有k个数字，而k^k有n个数字，则$10^{k-1}\leqslant n^n<10^k$，$10^{n-1}\leqslant k^k<10^n$．为确定起见，设$n\geqslant k$．那么$n^n<10^n$，即$n<10$和$k<10$。

剩下验证$2^2<10, 3^3<100, 4^4<10^3, 5^5<10^4, 6^6<10^5, 7^7<10^6$，$10^7<8^8<10^8$，$10^8<9^9<10^9$。

198．把三角形ABC绕着顶点C转动90°，使点A变为点B。那么E变为直线AC上的点F，对于它有$FB \parallel CL \parallel DK$，且$FC=CD$，因此$BL=LK$。

199．1）答案：可以。

对于老鼠的任何位置应该这么放猫，使得老鼠在它们之间的、且平行于棋盘一条对角线的线段上。而当老鼠每走一步时，猫应该这么来移动，使得老鼠仍像以前一样在猫之间的且平行于对角线的直线上。

2）过老鼠作两条平行于对角线的线段，并去掉这些线段上的格子，在棋盘上剩下的4个部分中有一部分没有猫。所以，老鼠应该往边缘方向走到这一部分中去。显然，猫不能抓住它，因为猫走任何一步之后，老鼠在任何方向上都可以避开猫。

200．1）为了得到所要求的摆法，我们把所有数写成一行，在左半行中写上偶数、右半行中写上奇数。同时左、右不同两半中的任意两数之和的1／2不是整数，因而不包含在这两半之中，然后再把每一半分成两部分（两个1/4），并把形式为$4k$、$4k+2$、$4k+1$、$4k+3$的数分别放到这4个部分中去，左边一半中不同部分的两数之和的1/2是奇数，因而不包含在这两个部分之中，同样，右边一半中不同部分的两数之和的1/2是偶数，也不包含在右边这一半的两部分之中，继续把每一部分再分成两部分，而此时的“偶数”、“奇数”由它除以8时所得的不同余数来决定。最后得到的摆法如下：

8, 24, 16, 32, 4, 20, 12, 26, 6, 22, 14, 30, 2, 18, 10, 26,
7, 23, 15, 31, 3, 19, 11, 27, 5, 21, 13, 29, 1, 17, 9, 25,

2）为了证明这个结论对于任意数N成立，只要证明它对$N=2^n$成立（可把多余的数去掉，例如，从$128=2^7$个数的摆法中

可以去掉大于100的数，因此得到了$N=100$个数的摆法。）基本思想已在1）的解法中叙述过，可用数学归纳法来更简洁地叙述证明。

对于$n=1$和$n=2$，结论显然成立：摆法（1，2），（2，4，1，3）符合要求。如果a_1、a_2、…、a_N为N个数1、2、…、N（$N=2^n$）的满足条件的摆法，则不难证明

$2a_1$、$2a_2\cdots 2a_N$、$2a_1-1$、$2a_2-1$、$\cdots 2a_N-1$

将是$2N$个数1、2、…、$2N$（$2N=2^{n+1}$）的满足条件的摆法：对于不同的两半中的数考虑它们的奇偶性，对于同一半中的数则根据归纳假设。

201. 答案：15个数。（111、222、…、999、407、518、629、370、481、592）。

设$\overline{abc}$为所求之数，它应满足：

$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\overline{abc}$。

由此，$222(a+b+c)=6(100a+10b+c)$或者$7a=3b+4c$。这个方程可以用枚举一切方案的方法来解（例如，依次设$a=1$，2，…，9，并解所得的方程，计算出数字b、c，）。而简化枚举就有可能来考虑整除性。例如，方程可写为$7(a-b)=4(c-b)$。由此或者$a=b=c$；或者$a-b=4$，$c-b=7$（那么$0\leqslant b\leqslant 2$）；或者$b-a=4$，$b-c=7$（那么$7\leqslant b\leqslant 9$）。

202. 我们考察已知多边形顶点的集合，并从中选择A、B、C三个顶点，使三角形ABC的面积为最大。（显然，三角形ABC的面积不小于能够放入多边形P内的任何三角形的面积，在下面我们要利用它的特殊情形。）

设M为多边形P的任意点，因为三角形MBC的面积不大于S_{ABC}，则M在以直线BC为对称轴的带形中，这个带形的宽度等于从顶点A所作的$\triangle ABC$之高的两倍。对于三角形MAB和三角形MCA作同样的推理，我们得到了多边形的所有点属于所作的

三条带形的交集——三角形$A'B'C'$（图82），它的面积等于$4S_{ABC}=4$.

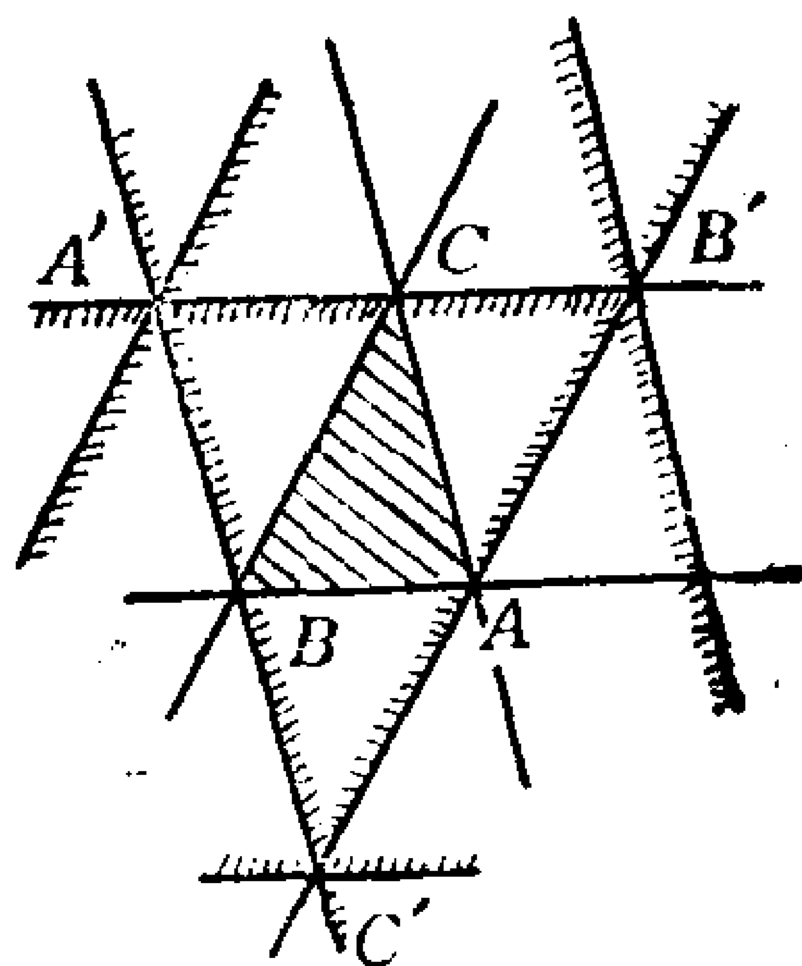


图82

注　类似的推理在第80题中见到过．在那里我们实质上证明了$\triangle A'B'C'$是使三个面积S_{MAB}、S_{MBC}、S_{MCA}都不超过S_{ABC}的点M之集合．

203．1）函数f在区间$[0, 1]$上单调不减，因为由$1\geqslant x\geqslant y\geqslant 0$得出$f(x)=f((x-y)+y)\geqslant f(x-y)+f(y)\geqslant f(y)$．此外，对一切$x$有$f(2x)\geqslant 2f(x)$．利用这些事实我们得到：

当$1/2<x\leqslant 1$时，　　$f(x)\leqslant f(1)\leqslant 2x$;

当$1/4<x\leqslant 1/2$时，　　$f(x)\leqslant \frac{1}{2}f(2x)\leqslant \frac{1}{2}\leqslant 2x$;

……　　　　　　　　……

当$\frac{1}{2^{n+1}}<x<\frac{1}{2^n}$时，$f(x)\leqslant \frac{1}{2}f(2x)\leqslant \frac{1}{2^n}\leqslant 2x$.

……　　　　　　　　……

因为$f(0)=0$，则对一切x有$f(2x)\leqslant 2x$.

2）答案：不成立．

例如：$f(x)=\begin{cases}0, & 当 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ 1, & 当 \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

这个函数满足此题的一切条件，然而

$f(0.51)=1>1.9\cdot 0.51=0.969$.

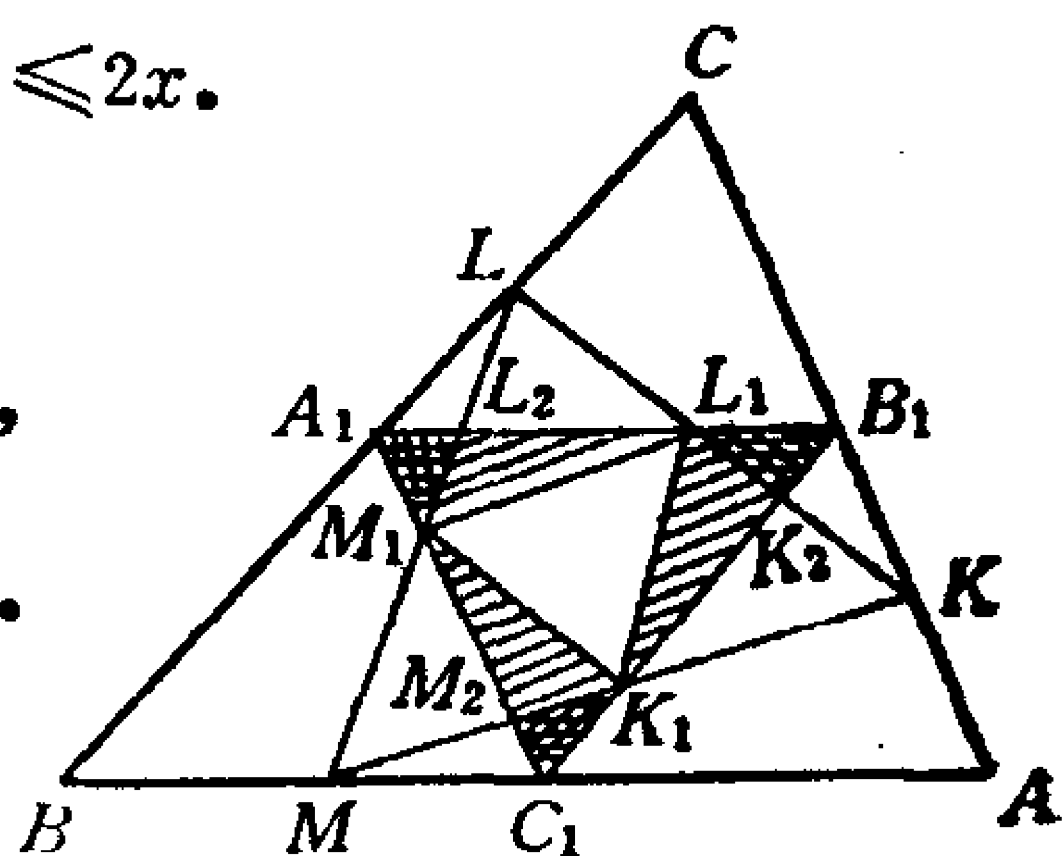


图83

204．答案：1/8．因为（图83清楚地表出）

$$\frac{C_1M_2}{M_2M_1}\leqslant\frac{AK}{KC}\leqslant\frac{AB_1}{B_1C}=1,$$

那么$C_1M_2\leqslant M_2M_1$，因此$S_{C_1M_2K_1}\leqslant S_{M_1M_2K_1}$．这也证明了$S_{A_1L_2M_1}\leqslant S_{L_1L_2M_1}$，$S_{B_1K_2L_1}\leqslant S_{K_1K_2L_1}$．

设S为三角形KLM和三角形$A_1B_1C_1$的公共面积，把所得的不等

式相加后得到：

$S_{A_1B_1C_1}-S\leqslant S_{K_1M_2M_1}+S_{M_1L_2L_1}+S_{L_1K_2K_1}=S-S_{K_1M_1L_1}\leqslant S$,

由此 $2S\geqslant S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}$，即$S\geqslant\frac{1}{8}$. 如果点$M$ 与点C_1重合，则L与C重合，而K与A重合，那 么$S=\frac{1}{8}$.

第 九 届

205. 如果圆的弦Q_1Q_2能由弦P_1P_2绕着 点O旋转α角得到，那么直线P_1P_2和Q_1Q_2的交点R可以先由弦P_1P_2的中点M绕着点O旋 转$\alpha/2$角(同时点M变为线段OR上的某个点M')，再作一个同位相似变换而得到，这个同位相似的中心为O、系数$k=1/\cos(\alpha/2)=OR:OM=OR:OM'$. 再把这些设想用于解题.

1）三角形$A_2B_2C_2$可利用外接变换由三角形KLM得到，而点K、L、M是三角形ABC三条边的中点. 因为$\triangle KLM\backsim\triangle A_2B_2C_2$，且$\triangle KLM\backsim\triangle ABC$，我们得到$\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

2）此题条件中的四边形是由四边形$ABCD$各边中点所构成的四边形通过相似变换得到的，但是任何四边形的任何边之中点都是平行四边形的顶点.

206. 答案：1/4.

首先指出，第二个人能达到$S_{XYZ}\leqslant 1/4$而不依赖于第一个人如何游戏. 为此他只要选择Y，使$XY\parallel AC$（图84），那么对于底边AC上的任意点Z，将有不等式.

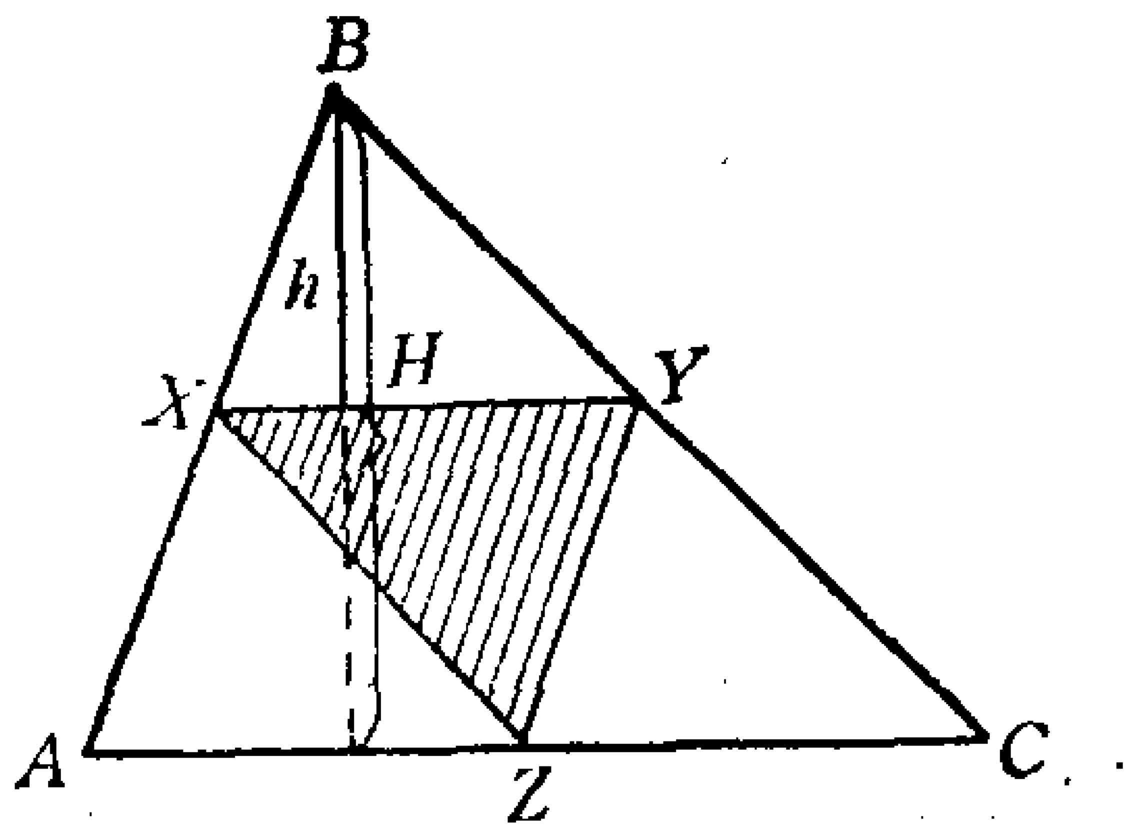


图84

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}}=\frac{XY}{AC}\cdot\frac{H-h}{H}=\frac{h(H-h)}{H^2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

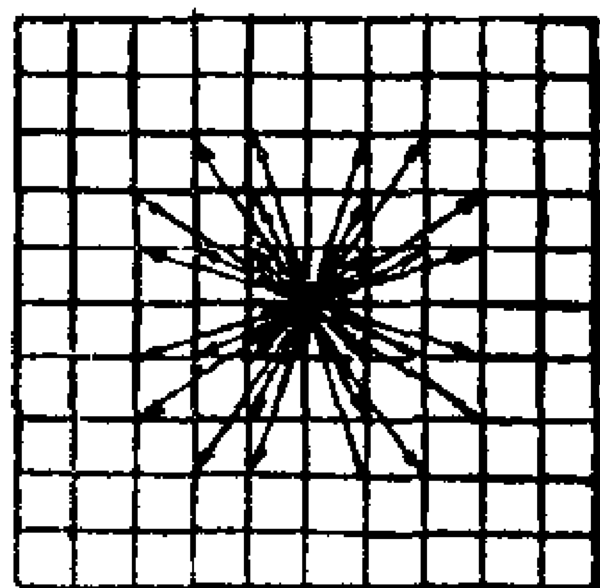


图85

另一方面，第一个人取AB边、AC边的中点作为X、Z之后，就能保证自己有$S_{XYZ}=1/4$，而不依赖于第二个人的选择。

207．答案：$4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$．

我们把32边形$A_1A_2\cdots A_{32}$的边界表示为32个向量之和：$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{32}A_1}=0$。

因为可以把32个方向不同的且和为0的向量作成一个凸32边形，此题就归结为求32个向量，使满足条件：

1）每一个向量的起点和终点在格纸的结点上；

2）任意两个向量的方向不同；

3）所有向量之和等于0；

4）满足条件1）—3）时，一切向量长度之和为最小。

我们把所有向量都移到一个点上，并认为在图85中表示的32个向量满足条件1）—4）。在这些向量之中有4个长度为1（图85中没有），4个长度为$\sqrt{2}$，另外，长度分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$的向量各有8个。

注　可以用类似的“密填水平线”方法（选择n组各有4个不同向量的向量组而且它们的长度最小）来构造$4n$边形，使它有最小的周长、且顶点在结点上。

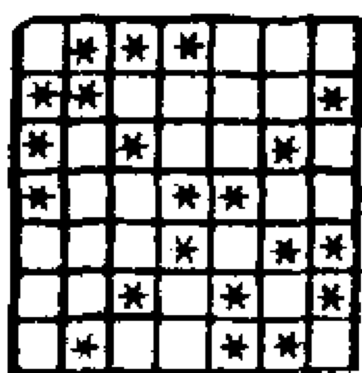


图86—1

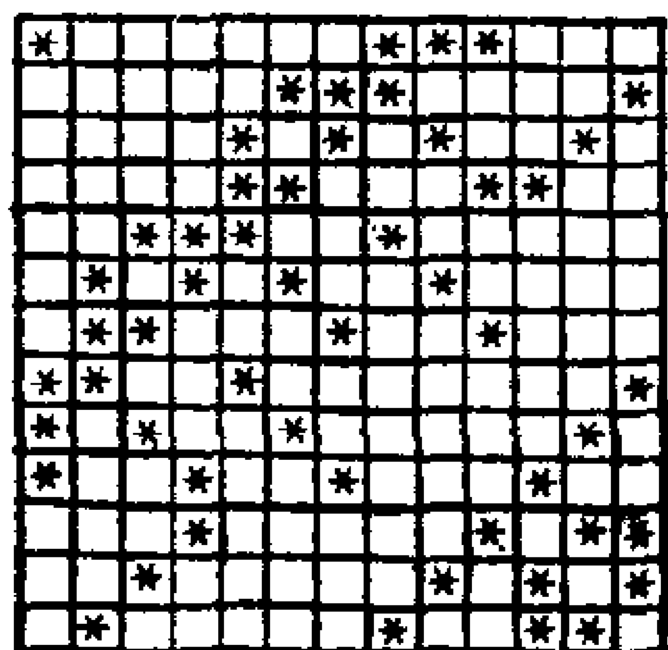


图86—2

208．答案：1）$k=21$；2）$k=52$（图86）．

我们来估计能被放入$m\times m$正方形内的点的数量。设x_i为在第i行中点的个数，$\sum_{i=1}^{m}x_i=k$。如果在某一行中标出了某两个格子的中心，那么在其它任何一行中不可能标出那样的两个格子来。在第i行中共计标出了$x_i(x_i-1)/2$组格子(每组两个)。因为所有被标出的格子组不相同，那么它们的总和不多于$m(m-1)/2$，即

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i(x_i-1)}{2}\leqslant\frac{m(m-1)}{2}.$$

由此得出

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^2\leqslant m(m-1)+\sum_{i=1}^{m}x_i=m(m-1)+k;$$

因为$\sum_{i=1}^{m}x_i^2\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_m)^2/m=k^2/m$,

我们得到不等式$k^2/m\leqslant m(m-1)+k$。由这个不等式得到

$$k\leqslant\frac{m+m\sqrt{4m-3}}{2}\qquad(*)$$

当$m=7$与$m=13$时我们得到$k\leqslant21$及$k\leqslant52$。

注 在解这个题时最使人不解的是实现精确估计的例子(参加奥林匹克竞赛的学生们是用类似的、借助于对称映射的方法求得的)，我们指出建立例子的方法。

在1)的例子中，用由0、1组成的且异于(0, 0, 0)的3数组来作为行(列)的“号码”，这样的3数组正好7个：(1, 1, 1)、(1, 1, 0)、(1, 0, 1)、(0, 1, 1)(1, 0, 0)、(0, 1, 0)、(0, 0, 1)。

如果$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$是偶数，我们标出行(a_1, a_2, a_3)和列(x_1, x_2, x_3)的交点上的格子。

在2)的例子中，利用0、1、−1组成的、且异于(0, 0,

0）的3数组来表示行和列的“号码”；同时，如果两个数组中的一个能由另一个乘以（-1）而得到，我们只用其中的一个．这些3数组正好13个：（1，1，1）、（1，1，0）的三个重排、（1，1，-1）的三个重排、（1，-1，0）的三个重排；（1，0，0）的三个重排．如果$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$能被3整除，我们标出行（a_1，a_2，a_3）和列（x_1，x_2，x_3）交点上的格子．

这是由$p=2$和$p=3$个元素构成的域上的有限射影平面的结构：点对应于列，射影平面上的直线对应于行，而此题条件中所要求的表格性质归结为：过每两个点有一条直线且每两条直线相交于一个点。（如果$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$按模p等于0，则直线（a_1，a_2，a_3）包含点（x_1，x_2，x_3）．

可以证明，只有当$m=p^2+p+1$时不等式（$*$）才变成等式，其中p为自然数；这里$k=(p+1)(p^2+p+1)$．对于那样的m和k，相应的表格是否存在的问题很复杂，它归结为有限个p阶的射影平面的存在性问题（在一般形式中不可解）；当p是奇数时，这个问题的回答是肯定的．

209．四边形$B_1B_4B_5B_6$（图87）的面积等于四边形$A_1A_2A_3A_4$面积的四分之一，因为它的对角线B_1B_5和B_4B_6与对角线A_2A_4、A_1A_3平行且等于它们的一半，而且凸四边形的面积可用公式$S=d_1d_2\sin\varphi/2$表示，其中d_1、d_2是它的对角线之长，φ是它们之间的夹角．同样四边形$B_1B_2B_3B_4$的面积等于四边形$A_1A_4A_5A_6$面积的四分之一．

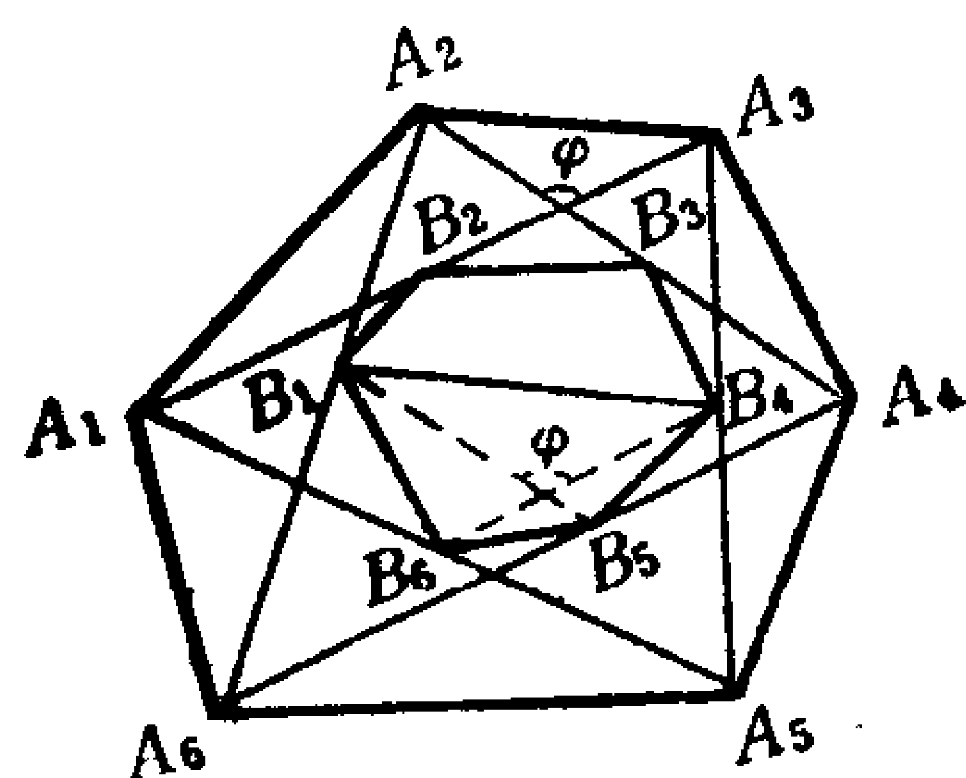


图87

210．当$n=1$时，4个数11、21、12、22满足条件，我们用归纳法来进行证明．

用a'表示用下列替换后从数字a所得到的数：用2代替1，用1

代替2．而用ab表示把数b添写到a上所得到的数．设已经构造出由2^{n+1}个数组成的集合：它的每个数都为2^n位数，同时这些数中的任意两个都至少在2^{n-1}个数位上的数字不相同．我们考察由数aa和aa'构成的集合A_{n+1}，其中$a\in A_n$．所有这些数都是2^{n+1}位，它们共有2^{n+2}个．此外，其中任意两个数至少在2^n个数位上不相同．事实上，对于任意a、b，数aa和aa'、aa和bb'恰好在2^n个数位上不相同（在使a、b不相同的那些数位上，a'和b'相同；反过来也对）；根据归纳假设，数aa和bb至少在2^n个数位上不相同．结论得证．

211．对某一条直线作所有多边形的投影．每一个多边形的投影都是线段，同时由已知条件知道任何两条线段有公共点．由此得到所有线段有公共点（为了证实这一点，只要把已知直线看作数轴，并取这些线段中离原点最近的右端点）．垂直于已知直线、并通过上述公共点的直线与所有多边形都相交．

212．不失一般性，可以认为：$a\geqslant b\geqslant c$．那么$c(a-c)(b-c)\geqslant 0$，由此，$c^3+abc\geqslant ac^2+bc^2$，只要证明$a^3+b^3+2abc\geqslant ab(a+b)+a^2c+b^2c$，即证$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$即可．

注　容易看到，只有当$a=b=c$时，所给不等式中的等号成立．

213．如果一个苍蝇在顶点A，那么由苍蝇构成的三角形的重心在三角形ADE中(图88)，其中$DE:BC=2:3$．因为其中一只苍蝇到过所有顶点，那么苍蝇三角形的重心应该属于图中用斜线标出的三个三角形．这些三角形的唯一公共点是已知三角形的重心．

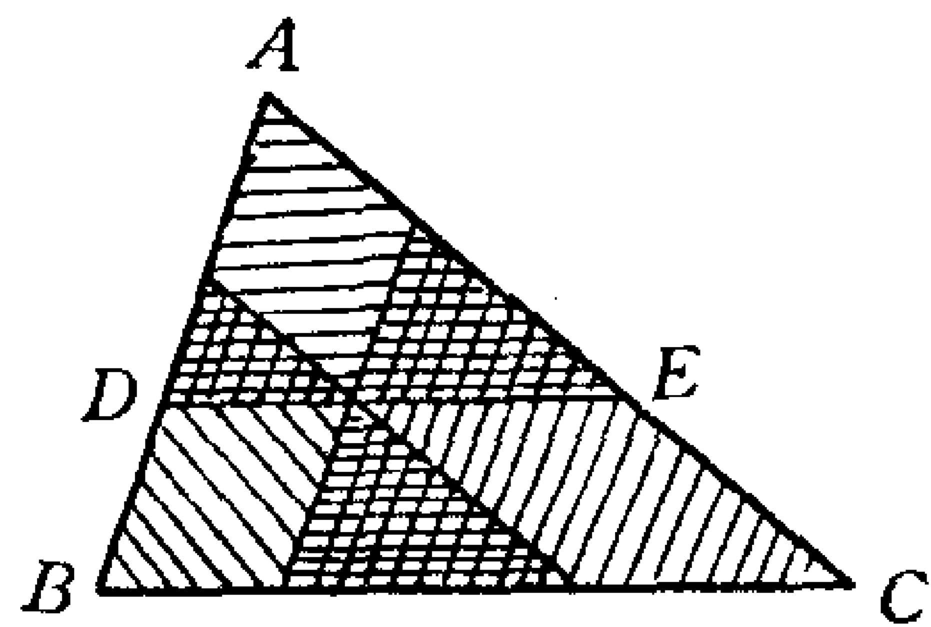


图88

214．设p为0的个数，q为1的个数，r为2的个数．每一步之后所有三个数p、q和r都增加或减少1，因而奇偶性也随着改变．当在黑板上只剩下一个数字时，p、q和r中的一个变为1，另外两

个变为0。所以，起初这些数中的一个数的奇偶性异于另外两个数的奇偶性，它所对应的数字仍在黑板上。

215. 设A_1、A_2、…、A_n为直线与带形下边缘的交点，且号码的次序是从左向右；B_1、B_2、…、B_m为直线与带形的上边缘的交点（也是按照从左向右的次序）。按照数1、2、…、n的顺序把从点A_1、A_2、…、A_n出发的道路编号，从构造道路的规则得出以下性质：

1° 每条道路恰好通过每条直线的1条线段。

2° 相邻的第k条和第$k+1$条道路以顶点相接，同时第k条在第$k+1$条的左边（$k=1, 2, \cdots, n-1$），不相邻的道路一般没有公共点。

3° 第k条道路结束于点B_k。

下面来进行证明。

1）我们研究有偶数号码的道路，由性质1°，它们不可能有公共点，而这些道路至少有$n/2$条。

2）我们用两种方法来计算在所有道路上的线段总数。任一条直线上的每一条线段A_iB_{n+1-i}被它与其余直线的交点分为n条线段，因此共有n^2条线段。另外根据性质1°也能求出这个和数n^2，只要把n条道路上的线段的条数加起来。因此至少存在一条道路，在这条道路上的线段不少于n条。

显然，2）也可由4）得到。

3）现在来估计第1条和第n条道路上线段的数目。

这些道路围成一个凸集合，它在第1条的左边、第n条的右边、第1条道路在角A_1PB_1的内部，第2条道路在角A_nPB_n的内部，其中P是直线A_1B_n与A_nB_1的交点。其它直线A_2B_{n-1}、A_3B_{n-2}、…、$A_{n-1}B_2$只能与第1条、第n条道路之一有公共线段（即在点P同侧的有公共线段）。于是在第1、第n两条道路中线段至多有$4+(n-2)$条。因此在其中的一条中至多有$\frac{n}{2}+1$条线段。

4）我们来考察中间道路，如果n为奇数，它的号码为$m=(n+1)/2$；如果n为偶数，其号码为$m=n/2$。我们要证明它经过所有直线(图89)。事实上，它把带形分成两个部分，线段A_1B_n、A_2B_{n-1}、…、A_nB_1都从区域中的一个点出发（这个点可能在边界上）而结束于另一个点。所以它们中的每一条线段都与中间道路有公共点，因而有公共线段。

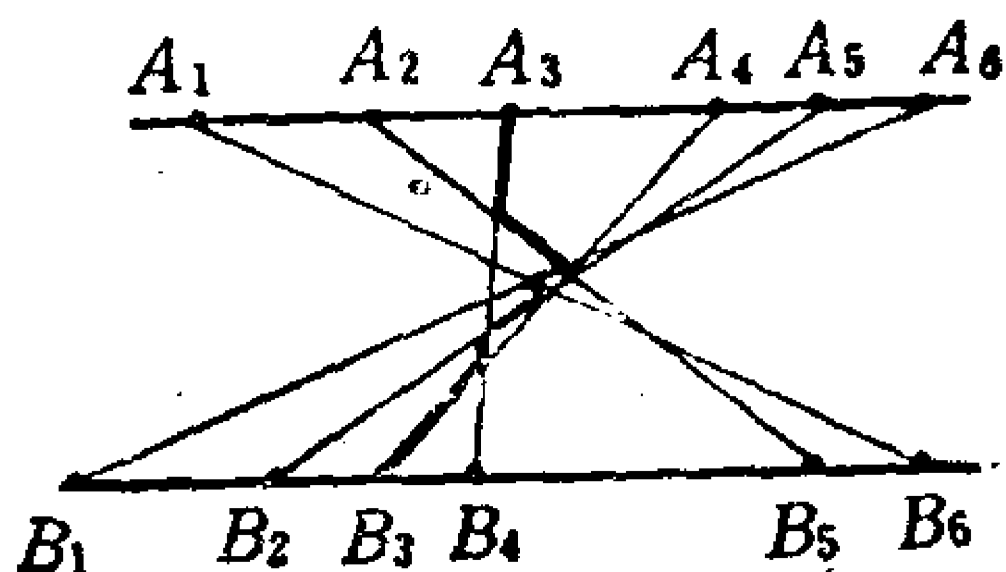


图89

注　在此题中有趣的是求出最长道路中线段数目的最好估计。

216．答案：k为偶数时可以，k为奇数时不可以。

例如，当k为偶数时，可以做一个由$2\times2\times1$个黑白相间的小块组成的立方体。

现在假设，当k为奇数时能组成一个所要求的立方体。用线段连结相邻小白块的中心，那么经过每一个中心有2条线段。这样的一组线段构成一条或若干条闭折线。我们指出，由长度相同、且有三个两两相互垂直方向的线段组成的闭折线的边数是偶数（每一个方向上的边数也是偶数）。于是白色小立方体的个数是偶数，这也证明了黑色小立方体个数的奇偶性。矛盾。

217．1）可以取多项式$P(x)$的所有系数的一切数字之和作为数S，那么对于任意$n\geqslant n_0$，其中n_0是使10^{n_0}大于所有系数的数，有$a_{10^n}=S$。

2）可以把1）的结果用于多项式$Q(x)=P(x+d)$，其中d为大的自然数；同时，当$n_0=n_0(d)$足够大时，对于任意$n\geqslant n_0$，数$Q(10^n)=a_{10^n+d}$的所有数字之和相同。当然，还需要验证条件：$Q(x)$的所有系数的符号相同。

当$d>0$足够大时，多项式$Q(x)=P(x+d)$的一切系数的

符号都与多项式$P(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n$的首项系数$p_0$的符号相同。我们指出两条证明的途径。

1° 多项式

$$Q(x)=p_0(x+d)^n+p_1(x+d)^{n-1}+\cdots+p_n$$
$$=p_0(x^n+C_n^1x^{n-1}d+\cdots+C_n^{n-1}xd^{n-1}+d^n)+$$
$$+p_1(x^{n-1}+C_{n-1}^1x^{n-2}d+\cdots+d^{n-1})+\cdots+p_n$$
$$=q_0x^n+q_1(d)x^{n-1}+\cdots+q_n(d),$$

其中$q_k(d)$是d的多项式，$k=0, 1, \cdots, n$，同时$q_k(d)$的次数为k，且首项是$p_0C_n^kd^k$（q_0就等于p_0），那么在$d>d_0$足够大时，每一$q_k(d)$的符号与p_0的符号相同。

2° 如果多项式$P(x)$前若干个系数p_0、p_1、…、p_{n-k}有相同的符号，那么对$P(x)$作下列变换：$P(x)\to P(x+d)=Q(x)$，就得到一个多项式，其系数q_0、q_1、…、q_{n-k}有相同的符号，且 $q_{n-k+1}=p_0C_n^{n-k+1}d^{n-k+1}+p_1C_{n-1}^{n-k}d^{n-k}+\cdots+p_{n-k}d+p_{n-k+1}$ 当d足够大时也有相同的符号。于是经过$n-1$步变换之后，我们就能从任意多项式$P(x)$得到所有系数的符号都与p_0的符号相同的多项式。

注 这里利用了下面的事实：二项式$(a+b)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$的系数$C_n^k$都是正数。

218。我们来考察世界冠军赛有n个参赛队的情形。

1）答案。如果$n\geqslant3$，则$k=n-2$(特别，当$n=20$时，$k=18$)。在世界冠军赛中比赛的总分等于$n(n-1)$（取胜得2分，平局得1分，失败得0分），在欧洲冠军赛中总分为$k(k-1)$分。

设x为欧洲冠军在世界冠军赛上所得的分数，而y为它在与欧洲队比赛中得到的分数，$x\geqslant y$。设其余的每一个队在世界冠军赛

中取得的分数大于x，即不小于$x+1$分，那么$x+(n-1)(x+1)\leqslant n(n-1)$或者$x\leqslant n-2+\frac{1}{n}$，而因为$x$为整数，则$x\leqslant n-2$。

其余每一个欧洲队在欧洲冠军赛中至多得$y-1$分，因此$y+(y-1)(k-1)\geqslant k(k-1)$，或者$y\geqslant k-\frac{1}{k}$，而因为$y$为整数，$y\geqslant k$，于是$k\leqslant y\leqslant x\leqslant n-2$，即$k\leqslant n-2$，

在图90—1中举出了锦标赛记分表的例子，它反映了欧洲冠军（第3个队）可以在世界冠军赛中得分最少。

1		1	2	1	1	1				1
2	1		2	0	1	1				1
3	0	0		2	1	1				1
4	1	2	0		1	1				1
5	1	1	1	1		1				
6	1	1	1	1	1					
⋮										⋮
										·
										1
n	1	1	1	1	1		··		1	

图90—1

								A	B
1		1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	0	1
6	1	1	0	0	0		1	1	0
7	1	1	1	0	0	0		0	1
A	1	0	1	0	1	0	1		0
B	0	1	0	1	0	1	0	1	

图90—2

1		1	1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0		1	1	1	0
7	1	1	0	0	0	0		1	0	1
8	1	1	1	0	0	0	0		1	0
A	1	0	1	0	1	0	1	0		1
B	0	1	0	1	0	1	0	1	0	

图90—3

1		1	1	1	1	0
2	0		1	1	1	0
3	0	0		1	1	1
4	0	0	0		1	1
5	0	0	0	0		1
6	1	1	0	0	0	

图90—4

1		1	1	1	0
2	0		1	1	0
3	0	0		1	1
4	0	0	0		1
5	1	1	0	0	

图90—5

图90—1：冰球冠军赛，n个队，$k=n-2$，从第3队至第n队是欧洲队，第3队是欧洲冠军队。图90—2：篮球冠军赛，$n=8$，$k=3$，第6、7、8队是欧洲队；第6队是欧洲冠军队，A队和B队是增补队。图90—3：篮球冠军赛，$n=7$，$k=3$，第5、6、7队是欧洲队，第5队是欧洲冠军队，A队和B队是增补队。图90—4：

篮球冠军赛，$n=6$，$k=2$。图90—5：篮球冠军赛，$n=5$，$k=2$。

2）答案：$k=n-5$，n为大于8的偶数（特别，当$n=20$时，$k=15$）。当n为奇数且$n\geqslant 7$时，$k=n-4$；当$n=6$及$n=5$时，$k=2$。

在篮球冠军赛中取胜的队得1分，败北的队得0分，所以比赛结束时正好$n(n-1)/2$分。我们研究$n=2l$的情形。

作与上面相同的推理后，我们得到（x、y与1）中一样）：

$$x+(2l-1)(x+1)\leqslant 2l(2l-1)/2=l(2l-1), \quad (1)$$

$$y+(k-1)(y-1)\geqslant k(k-1)/2. \quad (2)$$

由不等式（1）得到，$x\leqslant l-\frac{3}{2}+\frac{1}{2l}$，因此$x\leqslant l-2$，由不等式$l-2\geqslant x\geqslant y$和不等式（2）得到

$$k^2+(5-2l)k-2\leqslant 0. \quad (3)$$

当$l\geqslant 4$时，满足不等式（3）的最大整数k等于$2l-5$（当$k=2l-5$时不等式（3）成立，当$k=2l-4$时（3）的左边为正）。

现在要证明，等式$k=2l-5=n-5$在$l\geqslant 4$时能成立。在图90—3中作出了$n=8$，$k=3$的锦标赛记分表（最后的3个队为欧洲队）。这张表是归纳法的开始。

下面我们用数学归纳法来证明，并在每一步中增补两个欧洲队。

首先指出，当$k=2l-5$时一定有$x=y=l-y$。事实上，

$$y\geqslant\frac{(k-1)(k+2)}{2k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}, \text{或} y\geqslant l-2-\frac{1}{2(2l-5)}.$$

因为y是整数，则$y=l-2=x$。这就是说，欧洲冠军输给了所有非欧洲队。

现在假设，当$k=n-5=2l-5$的冠军赛表已经实现、现按以下规则增补两个欧洲队A队和B队：A队赢号码为奇数的原先的队和B队，并输给了其它队，B队赢偶数号码的队并输给其余的

队．每一个原先的队结果各得一分，所以他们之间的形势没有变化．

现在欧洲冠军有$l-1$分，A队有$l+1$分，B队有l分，所以原欧洲冠军仍是最后一名．在与欧洲队的比赛中A队取得$l-2$分（在与原先的队比赛中得$l-3$分，与B队比赛得1分）．B队在与欧洲队比赛中也得$l-2$分，所以欧洲冠军仍然是原来的队．

当$l\geqslant 4$，$n=2l-1$的情形，以及$n\leqslant 6$可进行相似的研究（图90的3）、4）、5））．

219．1）我们标出2×2矩阵中两个最大的数．如果它们在一列中，那么所求之数是它们之中较小的那个；而如果两个最大的数在一行中，则所求之数是另外两个数中较大的那个（这里允许不严格的不等式）．

剩下的是上面所标出的两个数在对角线上的情形（而且这两个数严格大于另外两个数），但这个情形是不可能的，利用下面这个事实可以较简单地证明这一点，分数$(c+d)/(p+q)$总在c/p与d/q两个数之间（当$p>0$、$q>0$时图91给出了这个事实的几何解释）．由此得到$(a_1+b_1+a_2+b_2)/(p_1+q_1+p_2+q_2)$在$(a_1+b_1)/(p_1+q_1)$与$(a_2+b_2)/(p_2+q_2)$之间，也在$(a_1+b_2)/(p_1+q_2)$与$(a_2+b_1)/(p_2+q_1)$之间．因此矩阵中两个最大数和两个最小数不可能在对角线上．

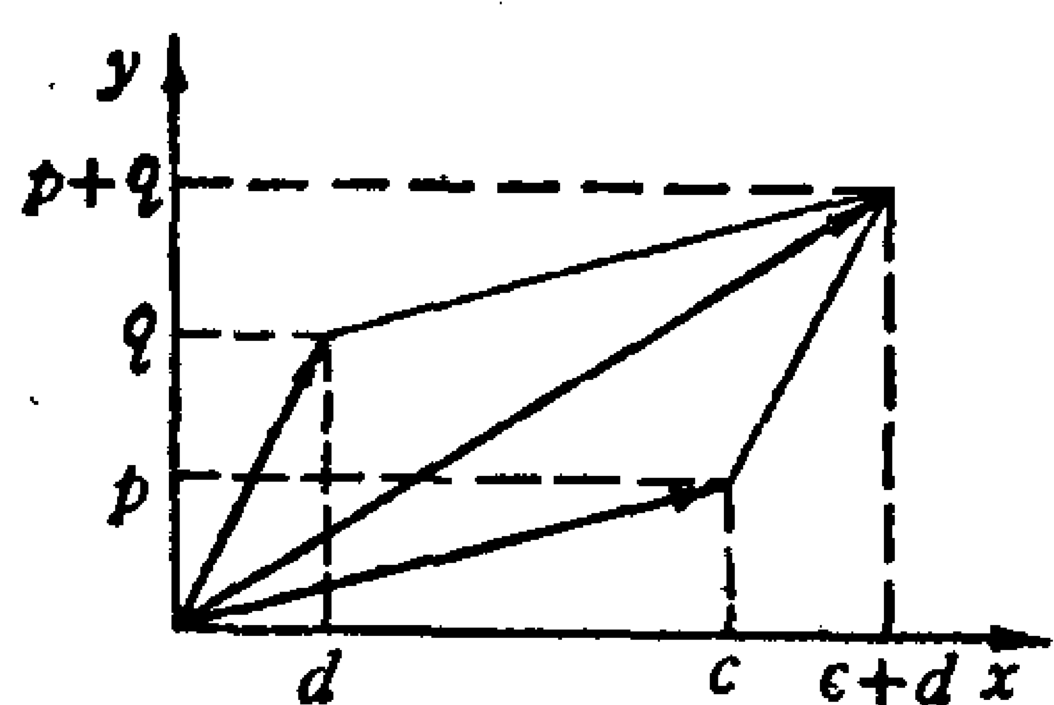


图91

2）我们给出此题的两种解法．一种解法不依赖于1），因而是给出了这个特殊情形的新的解法；另一个方法是把1）作为引理来引用的．

解法1．我们应该指出矩阵中那样的数 $x^*=\dfrac{a_k+b_l}{p_k+q_l}$，它满

足条件：$\frac{a_k+b_j}{p_k+q_j}\leqslant x^*$（对一切$j$），$\frac{a_i+b_l}{p_i+q_l}\geqslant x^*$（对一切$i$）；这些条件可改写为$p_kx^*-a_k\geqslant -q_jx^*+b_j$，$p_ix^*-a_i\leqslant -q_lx^*+b_l$。（$*$）

我们研究分段线性函数$f(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(p_ix-a_i)$

和$g(x)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(-q_jx+b_j)$，其中每一个函数的图象是由直线段和两条射线组成。第一个函数单调增加，第二个函数单调减少。因此方程$f(x)=g(x)$有唯一解（$x^*=y^*$），其中$y^*=f(x^*)=g(x^*)$，（点（x^*，y^*）是直线$y=p_ix-a_i$与直线$y=-q_jx+b_j$交点中最高的那个点，图92）。我们取交点是（x^*，y^*）的线性函线$y=p_kx-a_k$与$y=-q_lx+b_l$的号码作为k和l。即取那些使$p_kx^*-a_k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(p_ix^*-a_i)$

$=y^*=-q_lx^*+b_l=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(-q_jx^*+b_j)$的线性函数。对于所指出的$k$、$l$和$x^*$，所需要的条件（$*$）得到满足。

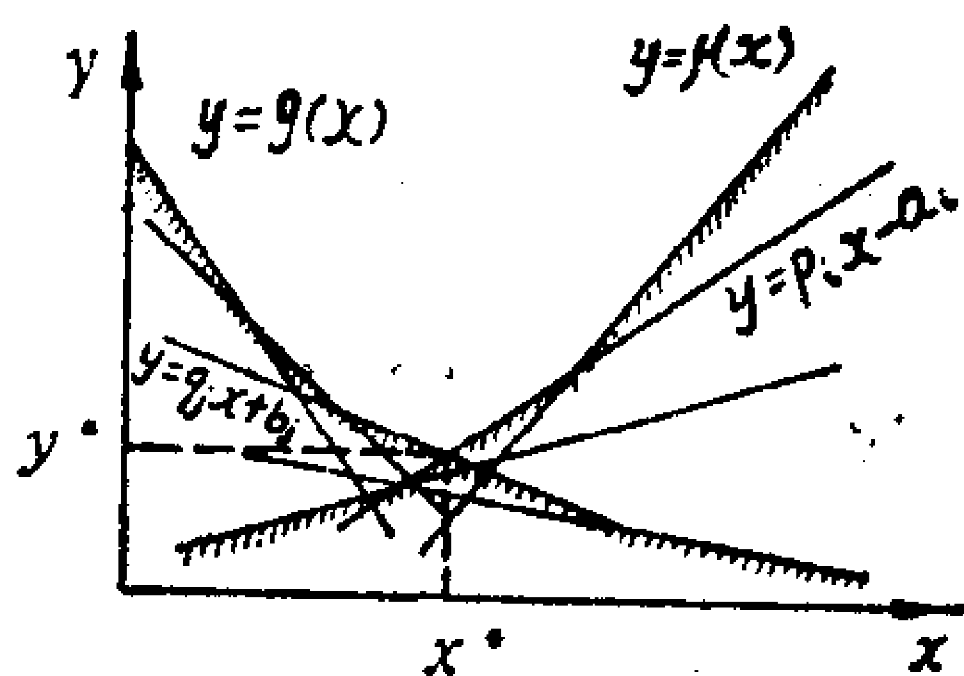


图92

解法2．是以出色的观察为基础的．我们说矩阵有“鞍”，如果它存在一个数，这个数不小于其所在行的一切数，也不大于其所在列的一切数．

引理．如果由所给矩阵划去$m-2$行和$n-2$列得到的每一个2×2矩阵有“鞍”，那么$m\times n$矩阵也有这个性质．

这个引理把2）归结为1）的特殊情形．

我们来证明引理．假设矩阵没有“鞍”，但它的任一个2×2子矩阵有鞍．我们在这个矩阵的第i行中标出某个最大的数M_i，而在第j列中标出最小的数m_j．用所标出的数作一个链：从一行

中的某个最大数开始到它所在列的最小数，再由它到所在行的最大数，等等。那样的链不可能终结于矩阵的某个元素上（因为矩阵没有鞍），因此它应该包含一个闭链。我们改变号码，即用适当的方法重排行和列，可以认为这条闭链由元素$M_1=x_{11}$，$m_1=x_{21}$，$M_2=x_{22}$，$m_2=x_{32}$，…，$m_{r-1}=x_{rr-1}$，$M_r=x_{rr}$，$m_r=x_{1r}$组成（图93），同时$M_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r} M_i$。因为在左上角的2×2矩阵有鞍，同时$m_1<M_1\leqslant M_2$，$m_1<M_2$，且$x_{12}<M_1$，应该有$M_1=x_{12}\leqslant M_2$。类似可证明（研究有以下行的2×2矩阵：$(m_2, M_3)$、$(m_3, M_4)$…）第一行的元素都等于$M_1$：$x_{11}=x_{12}=x_{13}=\cdots=x_{1r}=M_1$。那么$x_{1r}=m_r$为鞍点，矛盾。

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & M_2 & \cdots & \cdots & M_r \\ m_1 & M_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & m_2 & M_3 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & m_{r-1} & M_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

图93

注　下面这件事是很有趣的：评委会的成员事先知道2）的好几种解法，但是上述的解法只是在判阅了参加奥林匹克竞赛的学生试卷之后才发现的。

第　十　届

220. 可用一句话来概括解题的思想：到指针端点平均距离（按时间）之和大于到表中心的距离之和，证明可以这样来作：

我们研究在相距30分的两个时刻，从桌子中心O到分针末端的距离之和S_1、S_2。而S_1+S_2大于$2S_0$，S_0为从O点到手表中心的距离之和，因为每一个三角形OM_1M_2的两条边OM_1和OM_2的长度之和大于线段M_1M_2上的中线长度的两倍（图94）。因此

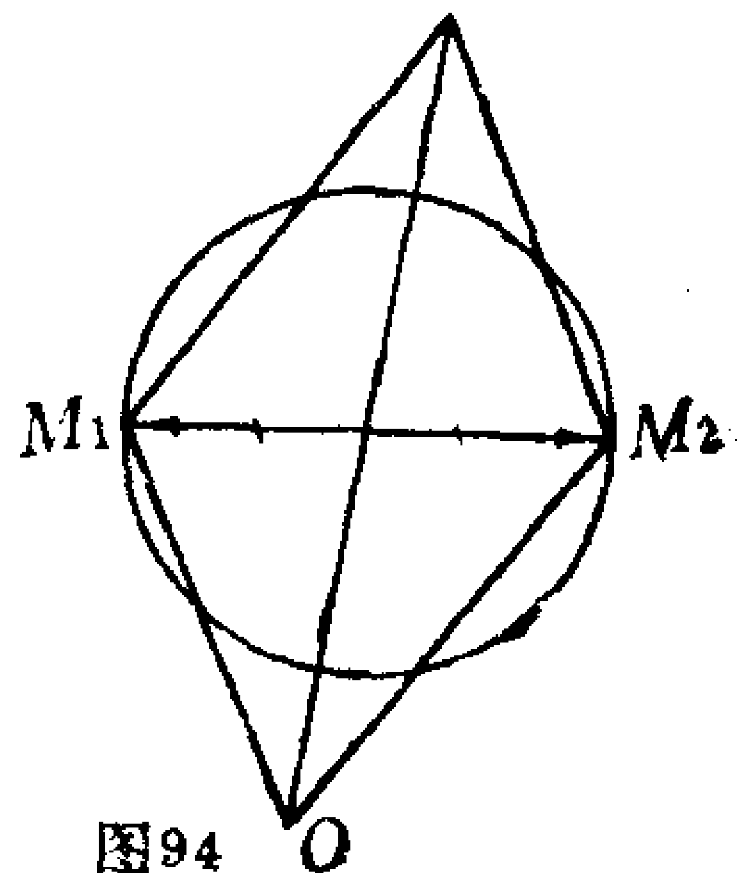


图94

至少有一个数S_1或者S_2大于S_0。

221. 1）的解可由下面两个想法得出：（1）在第m行($m\geqslant 2$)的每一个数下面写着不小于a的数；（2）每一个这样的数不超过1000。为了解2）还需要注意到，如果第m行（$m\geqslant 2$）中的数a严格小于在它下面的数b，则$b\geqslant 2a$，这是因为每组有a个数的若干组数(每一组都在相等的数的下面)合并成由b个数组成的一组数；由此用归纳法得到，在那样的情景中$b\geqslant 2^{m-1}$，但是仅当$m\leqslant 10$时，$2^{m-1}\leqslant 1000$。关于第10行与第11行不相同的例子是

$$0,1,2,2,4,4,4,4,\underbrace{8,8,\cdots,8}_{8},\cdots,\underbrace{256,\cdots,256}_{256},\underbrace{488,\cdots,488}_{488}.$$

下面就是它的一系列变换：

№2　1，1，2，2，4，…，4，8，…，8，…，256，…，256，488，…488。

№3　2，2，2，2，4，…，4，8，…，8，…，256，…，256，488，…488。

…………………………………………………

№10　256，256，……………………………256，488，…488。

№11　512，512，……………………………512，488，…488。

注　类似可证明把n个数按以上规则写出的（其中$2^{k-1}\leqslant n<2^k$）第$k+2$行将与第$k+1$行相同，第$k+1$行也可以不与第k行相同。

222. 1）是2）的特殊情形，因而证明相似。我们指出解2）的思路。

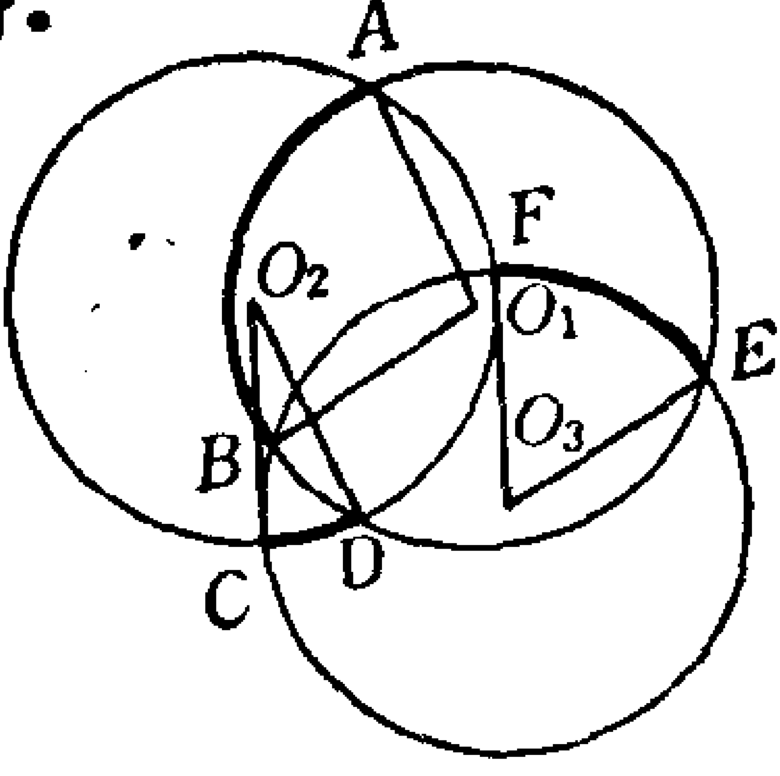


图95—1

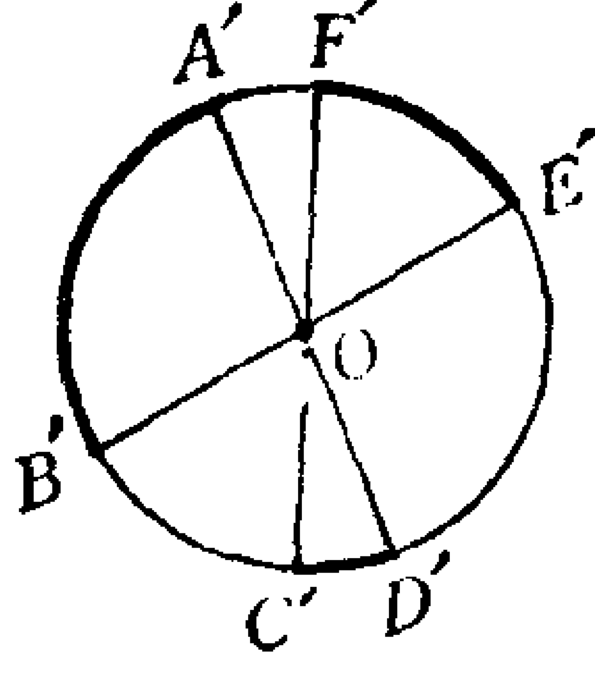


图95—2

设O_1、O_2、O_3分别为包含弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{EF}$的圆周的中心（图95—1）。那么$\overrightarrow{O_1A}=-\overrightarrow{O_2D}$，$\overrightarrow{O_1B}=-\overrightarrow{O_3E}$，$\overrightarrow{O_3F}=-\overrightarrow{O_2C}$（菱形的对边），因此把扇形$O_1AB$、$O_3EF$和$O_2CD$移到公共中心$O$后，我们得到了关于点$O$对称的三个扇形，它们与关于点$O$对称于它们的部分一起给出了一个完整的圆（图95—2）。

223. 如果按递减的次序重摆前三个数，那么数列的每一项将满足条件$x_k \leqslant x_{k-2}-x_{k-1}$，而数列也变成减数列：$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{21}$。如果假设$x_{21} \geqslant 1$，则由$x_{k-2} \geqslant x_k + x_{k-1}$，应该有$x_{20} \geqslant 1$，$x_{19} \geqslant 2$，$x_{18} \geqslant 3$，$x_{17} \geqslant 5$，…。为了得到$x_1 > 1000$的矛盾，只要再写出"斐波那契数列"的21项（索21）：

1，1，2，3，5，8，13，…，6745，10916。

224. 可以（例子表示在图96中）。换句话说，可以建立立方体顶点的集合到自身的一个映射，使任何两个相邻顶点（用棱连结的两个顶点）变为不被棱所连结的顶点。

225. 所证不等式的右边如同左边一样，关于$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$和$\vec{d}$对称（在和等于$\vec{0}$的条件下）；因为$\vec{b}+\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{d})$等等，不等式的右边等于所给向量两两和的长度之和的二分之一。注意到这一点，

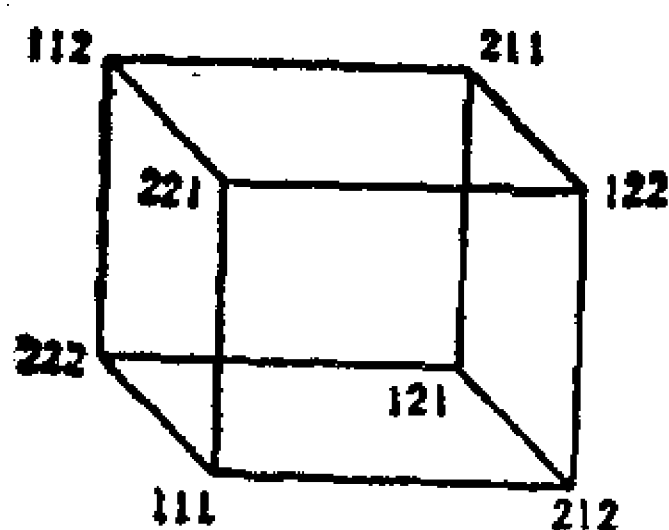


图96

可以选择表示和为$\vec{0}$的四个已知向量的方法，使由向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$、$\overrightarrow{CD}=\vec{C}$、$\overrightarrow{DA}=\vec{d}$构成的折线自相交。为此只要使被放到同一个点$O$上的向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$在同一半平面中，同时$\vec{a}$和$\vec{c}$在过点$O$且平行于$\vec{b}$的直线的两侧，那么

$$|\overrightarrow{a+d}|+|\overrightarrow{c+d}|=BD+AC\leqslant|\vec{b}|+|\vec{d}|，$$

再把$|\overrightarrow{b+d}|=|\overrightarrow{a+c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{c}|$加到上式。

226. 答案：1976。

除1976边形的中心O以外，所有标出点在中心为O的987个圆

周上各有1976个点．任何其它的圆周γ与987个圆周中的每一个相交于两个点；除去这些交点外，在γ上可能还只有一个标出的点O。因此在圆周γ上至多有$987\cdot 2+1=1975$个标出点．

227．设纸的剩余部分被分成k个小块．我们在每一小块上标出4个顶点（在这些顶点上的角为90°或者270°）．共有$4k$个顶点，其中每一个都是被剪去的n个矩形的顶点或者原矩形的顶点；同时，如果某一个点被标出两次，那么就有两个矩形与它相邻，因此$4k\leqslant 4n+4$，由此$k\leqslant n+1$．

228．3个点(x_0, y_0)、(x_1, y_1)、(x_2, y_2)在一条直线上当且仅当

$$(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)=0.\quad(*)$$

如果x_i和y_i（$i=0, 1, 2$）为时间t的线性函数，则（$*$）就是关于t的二次方程；它的根至多两个．

229．1）可以认为甲虫从中心向右移动$k\geqslant 2$个格子．我们在右边的49个格子中写上甲虫从相应的格子在水平方向上所移动的格子数，向右移动认为是正的，向左是负的．显然，对于最右边的那个甲虫，它所作的移动是负的，而在相邻格子中所写之数相差不大于2．当从中心格水平向右移动时，在某个地方应该“经过0”，因此所写数之中有一个等于1、0或者-1，即应有一个甲虫至多移动一个格子．

2）上结论此时不成立．图97举出的例子，说明当所有甲虫离最初的格子都较远的时候结论不成立（左边表示每一个甲虫的号码，右边表示有相应号码的甲虫应往什么地方飞．）．

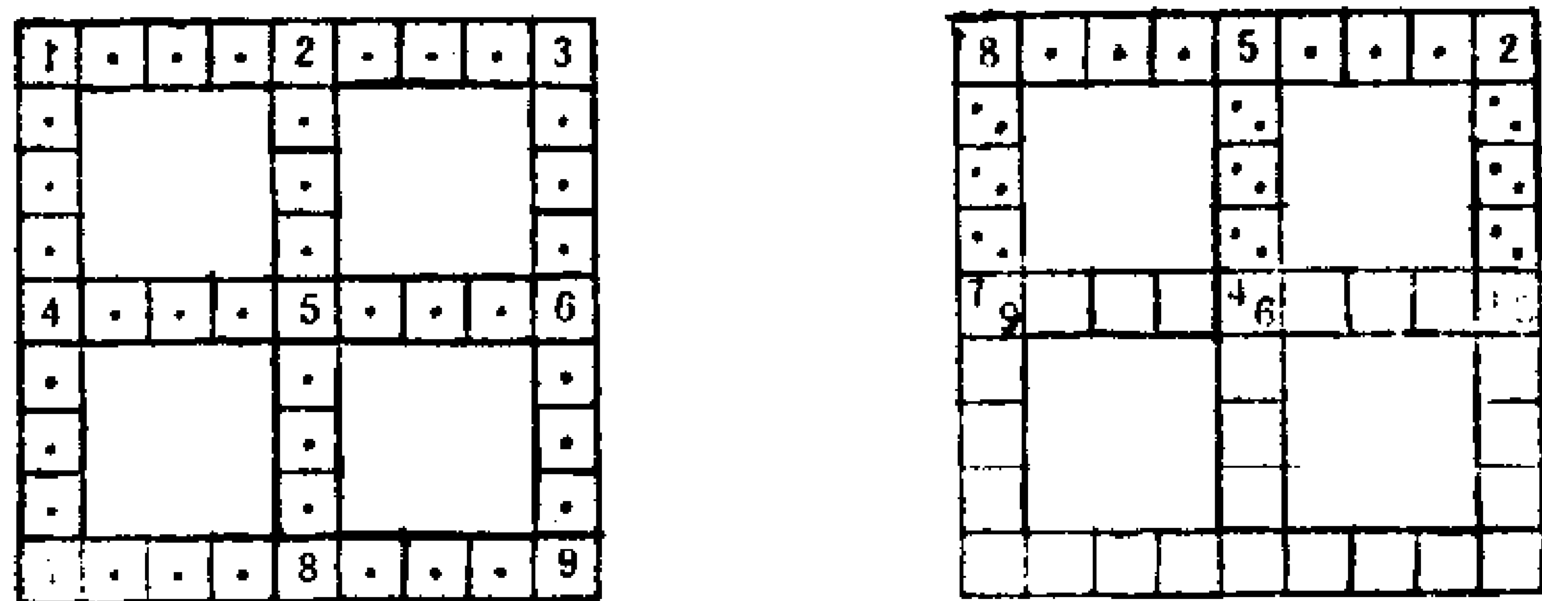


图97

3）答案：成立。

我们对于$m\times n$个格子的矩形来进行证明。对于1×1、2×2的正方形及1×2的矩形，显然成立（一般地，对于$1\times n$和$2\times n$的矩形可像1）那样证明）。设$m\times n$矩形的边长大于2：$2<m\leqslant n$。我们要证明，从它（用剪去边行的方法）可以得到较小的矩形Π，所有甲虫从Π飞出又飞回到Π中，因此只要证明在Π中有“几乎不动”的甲虫即可。

现在利用国际象棋中“王”从A格走到B格的步数来定义A、B两格之间的距离ρ：对于$r=1, 2, \cdots$，与C格之距不超过r的格子M（在格纸上）之集合填满了以C格为中心的正方形，它有$(2r+1)\times(2r+1)$个格子。由已知条件，甲虫从格子K落到格子$f(K)$之中：对于相互距离为1的两个格子A、B有$\rho(f(A), f(B))\leqslant 1$。那么对于任意两个格子$A$、$B$有

$$\rho(f(A), f(B))\leqslant\rho(A, B) \qquad (*)$$

在$m\times n$（$m\leqslant n$）矩形中把到矩形某一格子的距离为$n-1$的格子称为“边格”。如果$m<n$,那样的格子填满了两个边行（矩形的短边）；在$n\times n$正方形中，它们填满了4个边行（边），注意到，相对边行的两个格子之间的距离ρ等于$n-1$，而其它任意两个格子之间的距离要小些。

如果一个甲虫也不落到某一边行中，那么去掉这个边行，我们就得到所要的矩形Π，其大小为$m\times(n-1)$，甲虫能从任意格子K重飞到Π的格子$f(K)$中。

在相反情形时可以从已知矩形去掉所有边行来得到Π。事实上可标出若干个（两个、三个或四个）格子K_i，使在每一边行中包含$f(K_i)$中的一个格子。因为对于Π的任意格子M和每一个格子K_i有$\rho(M,K_i)\leqslant n-2$，那么由（$*$）得$\rho(f(M), f(K_i))\leqslant n-2$。而由此以及关于“对边”的注解得到$f(M)$含于$\Pi$中。

接下去显然可用归纳法来证明（对于$m+n$、或者对于$n=max\{m, n\}$进行归纳）．此外由它得出总存在能变为自身的2×2个格子的正方形．

注　此题是有名的布劳威尔定理的离散形式．这个定理是说把凸集变为自身的连续映射一定有不动点．

230．在图98中指出了构造分划的方法，这个分划满足关于边长为3的正三角形的最强条件2）、3）、4）：在由左边的图形变到右边的图形时每一个点M_2、M_3…和N_1、N_2、N_3…稍微向下移动，并构成很窄的三角形AM_kN_k、BN_kM_{k+1}，$k=1, 2, \cdots$．

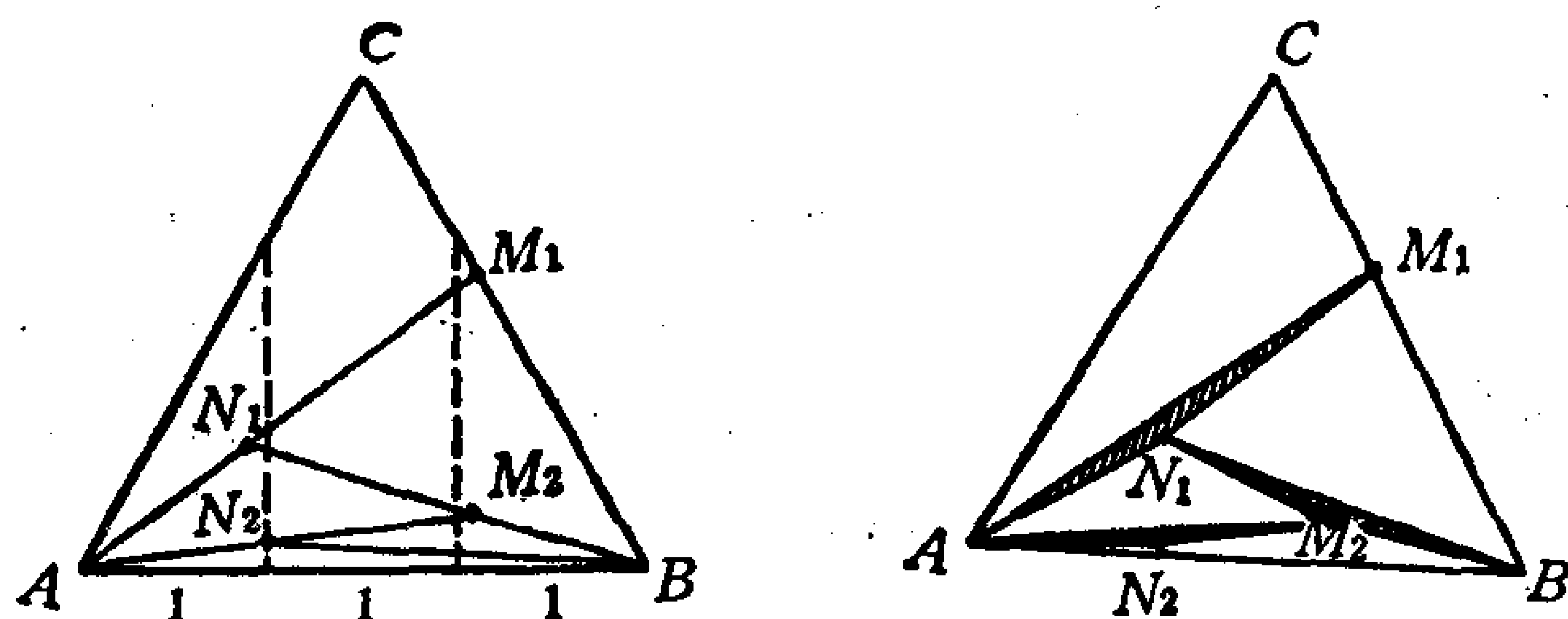


图98

231．1）的例子是显然的：只要把“块”$12\cdots n$接连写出n次，任何重排的第i个数字可以从第i块中取．

下面的这个数列适宜作为2）的例子：

$$\underbrace{12\cdots n\ 12\cdots n\cdots 12\cdots n}_{n-1个}\ 1$$

事实上，如果在重排（k_1，k_2，$\cdots k_n$）中即使两个相邻的数k_j、k_{j+1}按增大的顺序排着，那么就可以从第j块$12\cdots n$中取出它们，同时，最后的数字1也不需要．如果不是这样，那么重排一定与（n，$n-1$，$n-2$，…，2，1）重合，那末需要从第j块中取$n-j$，此时最后的数字1是有用的．

3）我们标出每一个数k（从1到n）在万能数列中的最初位置.标出的数中有一个数在从起点开始的第n个位置上或者更远些. 为了确定起见，假设n是那样的数. 在它之前至少有$n-1$个数，在它之后有一个数列，这个数列对于数（1，2，…，$n-1$）的重排应该是“万能的”. 所以，根据归纳法可以认为它的长度不小于$n(n-1)/2$已得到证明. 因此n万能数列不小于$n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$项.

4）我们指出，如果数n在n万能数列中只出现一次，那么在它之前及在它之后应该有（$n-1$）万能数列，这使有可能得到比3）中更精确的估计.

设l_n为最小n万能数列的长度，那么$l_2=3$. 我们要证$l_3=7$. 例如1213121或者1231231. 如果某一个数（比如说3）在数列中只出现一次，那么它的长度至多为$1+2l_2\leqslant 7$. 在另外的情形中，我们考虑首次在第3个位置上或者更远的位置上出现的数（假设这是3），在此之后3再次出现，甚至还有2“万能数列”，所以总长度不小于$2+1+1+l_2=4+l_2=7$.

类似地可证明$l_4=12$.例如：123412314231或者412341243142. 估计：如果某个数在数列中只出现一次，那么它的长度不小于$1+2l_3=15$. 在其它情形中它不小于$3+1+1+l_2=12$.

同样的推理表明$l_n\geqslant n(n+1)/2+n-2$

5）可以证明，下面这个长度为n^2-2n+4的数列是n万能的：

$$n12\cdots(n-1)n12\cdots(n-2)n(n-1)\cdots12n3\cdots(n-1)1n2 \quad (*)$$

其中n在每一块$12\cdots(n-2)$之中（首先在$n-1$之后，接着在$n-2$之后，…，最后在2之后）. 此外，n也在形式为$1n2$的开头和结尾中（关于$n=4$的第二个例子就是这样的）. 为此只要证明，在n第k次于（*）中出现的位置之左，能用划去一些数的方法得到由$k-1$个不同的数（1，2，…，$n-1$中的数）构成的任意数列，

而在右边也能得到$n-k$个那样的数构成的数列；问题在于所有这两部分（左边的和右边的数列）在划去所有出现的n之后（右边的部分也是在重新编号之后得到的）有以下形式：

$$\underbrace{12\cdots m\,12\cdots m\cdots 12\cdots m}_{r-1}\,12\cdots r，\text{其中} r\leqslant m=n-1$$

而这个数列具有“(m, r)万能的”性质：用划去某些数的方法从中可以得到有r个不同数（1，2，…m之中的数）的数列．

232．设$m=[n/2]$，所以$n=2m$或者$n=2m+1$．把所给的数用以下方法编号：$x_0=1$为初始数；x_1、x_2、…、x_m为从x_0开始的且按顺时针方向接连排着的数；x_{-1}、x_{-2}、…、x_{-m+1}（如果n为奇数，还有x_{-m}）为x_0后面沿逆时针方向排着的数．

1）如果任意两个相邻的数相差不大于ε，则

$$\begin{array}{ll}
x_1\geqslant 1-\varepsilon, & x_{-1}\geqslant 1-\varepsilon,\\
x_2\geqslant 1-2\varepsilon, & x_{-2}\geqslant 1-2\varepsilon,\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
x_{m-1}\geqslant 1-(m-1)/\varepsilon, & x_{-m+1}\geqslant 1-(m-1)\varepsilon,\\
x_m\geqslant 1-m\varepsilon, & (x_{-m}\geqslant 1-m\varepsilon)
\end{array}$$

把这些不等式相加，也包括等式$x_0=1$，且注意到所有n个数之和等于0，我们得到

$$0\geqslant n-(1+2+\cdots+(m-1)+m+(m-1)+\cdots+2+1)\varepsilon=n-m^2\varepsilon,$$

由此$\varepsilon\geqslant n/m^2\geqslant 4/n$（因为$m^2\leqslant n^2/4$）．

注 当n为偶数时这个估计是精确的，当n为奇数$n=2m+1$时，并利用x_{-m}，估计还可以稍许精确些：

$$\varepsilon\geqslant n/(m^2+m)=4n/(n^2-1).$$

2）这里可以两次利用1）的结果．设圆周上相邻两个数的最大差（绝对值）等于ε．由1）有$\varepsilon\geqslant 4/n$．另一方面，数组

（x_1, x_2, …, x_n）中相邻两个数的“规格化的”差$y_k=(x_k-x_{k-1})/\varepsilon$同样也满足1）的一切条件，因此对于某一个$k$,

$$\left|\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2}-x_k\right|=\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{2}-\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right|=$$

$$=\left|y_{k+1}-y_k\right|\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\frac{8}{n_2}.$$

（显然，这里下标有时是需要减少n或增加n的，因为这些数在圆周上）。

3）、4）我们要表明，对于任意的n如何得到δ的最好上估计，其中δ是圆周上的数与其两个邻数的算术平均值之间的最大差（按绝对值），并且构造最优的（有最小值δ）数组。这里可以认为数组（x_k）对称：$x_k=x_{-k}$，因为用$(x_k+x_{-k})/2$取代x_k能保持条件中规定的一切性质，且能保持估计$|x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}|\leqslant 2\delta$。在估计数$x_k$之前，先从$x_0$开始估计$x_{k-1}-x_k$，然后再从圆周上与$x_0$相对的点开始（数组的中点）估计。因为$x_1=x_{-1}$，所以

$$x_0-x_1\leqslant|-x_{-1}+2x_0-x_1|/2\leqslant\delta;$$

$$x_1-x_2\leqslant(x_0-x_1)+|-x_0+2x_1-x_2|\leqslant 3\delta, \qquad (1)$$

$$x_2-x_3\leqslant(x_1-x_2)+|-x_1+2x_2-x_3|\leqslant 5\delta,\ \cdots$$

……

$$x_{k-1}-x_k\leqslant(2k-1)\delta,\ \cdots$$

当$n=2m$时，如果存在一个与x_0相对的数x_m，类似可得

$$x_{m-1}-x_m\leqslant\delta,\ x_{m-2}-x_{m-1}\leqslant 3\delta,\cdots,x_{m-j}-x_{m-j+1}\leqslant(2j-1)\delta. \qquad (2)$$

如果$n=2m+1$（$x_m=x_{-m}$为两个相邻的数），那么$x_{m-1}-x_m\leqslant 2\delta$,

$$x_{m-2}-x_{m-1}\leqslant 4\delta,\ \cdots,\ x_{m-j}-x_{m-j+1}\leqslant 2j\delta. \qquad (2')$$

我们指出，对于小于$m/2$的k，关于$x_{k-1}-x_k$的最好估计是（1），而对于大于$m/2$的k，最好的估计是（2）或者（2′）；对于最优的数组（x_k）对应的不等式应该变为等式，同时最优数列的图象将是在分块抛物线上（图99）。

为了证明这一点并对每一个n作出δ的精确估计，分4种情形来讨论，它们分别对应于n被4整除时所得的余数。例如，$n=4l+2$，由（1）和（2）得出，$x_k=x_{-k}\geqslant 1-S_k\delta$，其中$S_k$为一行中前$k$个数之和：

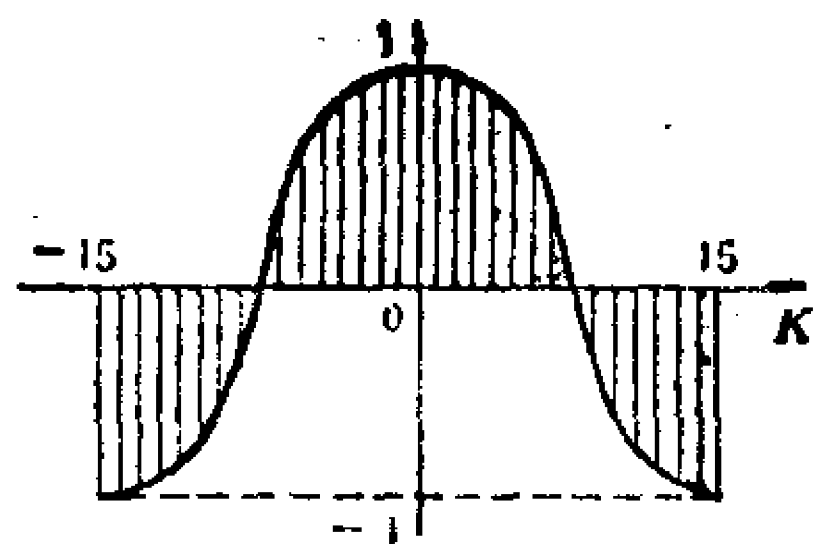


图99

$$1,\ 3,\ \cdots,\ 2l-1,\ 2l+1,\ 2l-1,\ \cdots,\ 3,\ 1.$$

再从一切x_k之和等于0的条件能得到δ的精确估计，而最优数组为$x_k=x_{-k}=1-S_k\delta$。特别，当$n=30$（$l=7$）时，我们得到

$$0=x_0+2(x_1+x_2+\cdots+x_{14})+x_{15}\geqslant 30-S\delta,$$

其中$S=2(S_1+S_2+\cdots+S_{14})+S_{15}$，这个和可按照下面简便的方法来计算：

$$S_{15}=1+3+5+\cdots+11+13+11+\cdots+3+1=7^2+8^2$$
$$=113=S_1+S_{14}=S_2+S_{13}=\cdots=S_7+S_8,$$

那么$S=(2\cdot 7+1)S_{15}=15\cdot 113$。于是$\delta\geqslant 2/113$。同时仅当数组（图中标出的）有$x_k=x_{-k}=1-S_k\delta=$

$$=\begin{cases}1-k^2\delta & k=0,\ 1,\ \cdots,\ 7\\ 1-(113-(15-k)^2)\delta=-1+(15-k)^2\delta & k=8,\ \cdots,\ 15\text{时}\end{cases}$$

$\delta=2/113$。

对于任意n，类似可得到δ的精确的界限，并能证明不等式$\delta\geqslant 16/n^2$对于一切n都成立（对于大的n，这个估计近似于精确）。

注 与最后这个题相似的是：求周期为T、且二阶导数的绝对值不超过1的函数的极大值与极小值的最大差。它甚至要比离散情形简单些。有最大"振幅"的函数图象也由分段抛物线构成。

233. 首先指出与任意自然数有关的几个事实。对于位于正n边形顶点上的$+1$和-1，共存在2^n种摆法。如果两种摆法能用题中所指出的运算，即改变正n边形顶点上符号的方法把一种摆法变成另一种摆法，那么就称它们等价。如果两次运算的结果与进行

这两次运算的先后次序无关，就称它们为“换向”的．任何一种运算的重复等价于不改变摆法的恒等运算．因此可排除重复运算．也可只限制在正p边形（p是质数）的顶点上改变符号（把这些点称为“生成点”）；对于任意n，正n边形顶点的集合可以分成n/p个生成p边形（n被p整除）．

在进一步解题之前，再考察几个具体的问题：

1）当$n=15$时共存在8个生成p边形：5个三角形和3个五边形，用E表示单位摆法（即都由$+1$组成的摆法）．等价于E的任意摆法可用指出这8个p边形中的某个子集来确定，这样的子集共有2^8个（包括空集）．这个数小于摆法的总数2^{15}，因此存在不等价于E的摆法．

2）当$n=30$时生成p边形的总数等于$15+10+6=31$．所以为了解题需要另外的方法．我们可以只限于较少个数的生成多边形，例如，在关于中心对称的每两个三角形（或五边形）中只取其中的一个并在它的顶点上改变符号，即在包含它的顶点的3个（或5个）“二边形”上改变符号，这等价于在与它对称的另一个三角形（五边形）上改变符号．现在共剩下$15+5+3=23$个生成多边形，于是至多$2^{23}<2^{30}$种摆法等价于E．

3）我们要表明，对于任意n如何求出等价于E的摆法的精确数$T(n)$．注意到，与某个由$+1$、-1构成的摆法A等价的摆法的个数也等于$T(n)$，因为它们都是由摆法A与E的等价类中的任意摆法逐项相乘得到的．用$K(n)$表示“等价类”的数量，于是

$$K(n)=2^n/T(n).$$

设n含有S个不相同的质因数，

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s} \qquad (*)$$

记$p_1p_2\cdots p_s=q$，$n/q=m$．把正n边形分成m个正q边形，那么计算$T(n)$的问题就归结为较简单的计算$T(q)=T(p_1\cdots p_s)$

的问题；因每一个生成p_i边形只包含在一个q边形之中，换句话说，在不同的q边形中所进行的符号的改变互不相关。因此

$$T(n)=(T(q))^m,\ K(n)=(K(q))^m.$$

我们从$s=2$开始，设$n=p_1p_2$，把n边形的顶点用数字0，1，…，$n-1$编号，并把这些数字写在$p_1\times p_2$的表格中，使在一列中的数在除以p_1时有相同的余数，同时在一行中的数在除以p_2时有相同的余数。这一点是能够做到的，因为除以p_1、p_2时的两个余数（r_1、r_2）单一地确定了从0至n的号码（图100）。圆周上的+1、-1的摆法对应于表格中的数$\sigma(r_1, r_2)=+1$、-1的摆法（r_1是行的号码，r_2是列的号码），而在p_1边形和p_2边形中改变符号分别对应于在σ的行和列中改变符号。用这些运算可以把任何摆法变为这样的摆法：它的第一行和第一列中都是+1。这些"所作的"摆法将两两不等价；事实上，在行和列中改变σ的符号时，乘积

	0	1	2	3	4
0	0	6	12	3	9
1	10	1	7	13	4
2	5	11	2	8	14

图100

从0至14的每一个数由它在除以5和3时的余数单一地确定

$$\sigma(r_1, r_2)\sigma(0, r_2)\sigma(r, 0)\sigma(0, 0)$$

的值保持不变（对于一切(r_1, r_2)，$1\leqslant r_1\leqslant p_1-1$，$1\leqslant r_2\leqslant p_2-1$，一组这样的值确定一等价类）。因此

$$K(p_1p_2)=2^{(p_1-1)(p_2-1)},\ T(p_1p_2)=2^{p_1+p_2-1}.$$

特别，$K(15)=2^8$，$T(15)=2^7$；$K(10)=2^4$。也可以求出$K(200)$：$n=200=2^3\cdot5^2$，$q=10$，$m=20$，$K(200)=(K(10))^{20}=2^{4\cdot20}=2^{80}$。

对于任意s，可类似地求出$K(n)$。

设$q=p_1p_2\cdots p_s$，那么，从0至$q-1$的号码k由q除以p_1、p_2、…、p_s的余数r_1、r_2、…、r_s所单一地确定（中国余数定理）。摆法$\sigma(r_1, \cdots, r_s)$是数组r_i（$0\leqslant r_i\leqslant p_i-1$，

$1 \leqslant i \leqslant s$）的集合上取值$\pm 1$的函数，借助于这些摆法能同时改变一“排”的符号，这一“排”由p_i个数组构成，且这些数组的第i个分量r_i取值为从0至p_i-1的数，而其余的$s-1$个数r_i固定（对于每一个$i=1, 2, \cdots, s$）．任何摆法都可用上述运算归结为这样的摆法：如果至少一个r_i等于0，$\sigma(r_1, r_2, \cdots, r_s)=+1$，所得到的这些摆法相互不等价，因为对于把某些分量换为0后所得到的这些数组来说，2^s个σ的值的乘积保持不变．

我们把当$q=p_1 p_2 \cdots p_s$以及$n=qm$时的答案写在下面：

$$K(q)=2^{(p_1-1)\cdots(p_s-1)}, \quad K(n)=2^{\varphi(n)},$$

其中 $\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_s})$．

特别，$K(30)=2^8$，$T(30)\ 2^{22}$．

注　这里的函数$\varphi(n)$是数论中有名的欧拉函数．

234．我们将只考察极点为P的“北半球”的点（因为在关于球心相对的点上函数值相同）．把极点P看做球面上的最高点．显然$f(P)=1$，且对球面上的其它任意点M有$0<f(M)<1$．

1）设O为球面的球心．从点M到赤道平面的距离C_M等于角MOP的余弦值，所以

$$f(M)=C_M^2=\cos^2\gamma, \quad \gamma=\angle MOP.$$

如果C_1、C_2、C_3为OP与三条互相垂直的半径OM_1、OM_2、OM_3所成角的余弦值，那么有$C_1^2+C_2^2+C_3^2=1$．因为C_1、C_2、C_3是单位线段OP对相互垂直的三条直线的投影之长度（可作一个棱长为C_1、C_2、C_3、对角线为OP的正平行六面体）．

2）和3）的解依赖于条件（$*$）的下面这个推论．

设Γ_X为（异于赤道和子午线）大圆的一半，它的端点在赤道上，且X是它的最高点．那末，对于弧Γ_X的任意异于X的点Y有$f(Y)<f(X)$．事实上，对于Γ_X上使$\angle YOY'=90^\circ$的点Y'有

$$f(Y)+f(Y')+f(Q)=f(X)+0+f(Q)=1,$$

其中Q为垂直于Γ_X所在平面的半径之端点.

2）过弧Γ_M上的每一个点X可以作弧Γ_x，并从中选择包含有N的弧Γ_x，那么$f(M)>f(Y)>f(N)$.

3）与前面类似，对于任意两个点M和N（其中M比N高些）可以作链：$M=X_0$，X_1，…，$X_r=N$，使X_j在Γx_{j-1}上，$j=1, 2, \cdots, r$.（如果M和N的纬度相近，但经度相差很大，则必须做的步数r就比较大）.

4）如果对于位于与赤道平面相距C_1的同一纬线Π上的两个点M和N有

$$f(M)-f(N)=\varepsilon>0,$$

那么对于任意两个点M'、N'，其中M'高于C_1，N'低于C_1，将有

$$f(M')-f(N')\geqslant f(M)-f(N)=\varepsilon,$$

即在高度C_1上，函数f完成了“跳跃”ε. 由（*）得到，对于使$C_1^2+C_2^2+C_3^2=1$的任何两个数$C_2>C_3\geqslant 0$，函数f应该或者在高度C_2上或者在高度C_3上完成至少$\varepsilon/2$的跳跃. 我们至少取$[2/\varepsilon]+1$组那样的(C_2, C_3)，就能得到与$0\leqslant f\leqslant 1$矛盾的结果.

5）可由前面各点得出，函数$f(M)$等于$g(C_M^2)$其中C_M是点M到赤道平面的距离，$y=g(x)$是区间$0\leqslant x\leqslant 1$上的某个单调增加函数，它满足条件$g(0)=0$，$g(1)=1$，而且

$g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)=1$，如果$x_1+x_2+x_3=1$. 由此得到（当$x_1=0$时）：$g(x_3)=1-g(1-x_3)$. 因此对于任意两个数x_1、x_2

$$g(x_1)+g(x_2)=1-g(1-x_1-x_2)=g(x_1+x_2).$$

但是满足这个函数方程以及“规格化”条件$g(1)=1$的唯一函数是$g(x)=x$. 这个事实首先对于有理数x（$x=\frac{1}{n}$，然后

$x=k/n$）加以证明，然后由单调性，再对一切x加以证明。

第 十 一 届

235．经过折线的某一条边BC的直线与其它的偶数条边或者奇数条边相交取决于相邻的两条边AB和CD是否在直线BC的一侧或者两侧（在后一种情形，边BC称之为"之字形"）。事实上，折线和直线BC的交点的奇偶性取决于点A、D在BC的一侧或者两侧（图101—1）

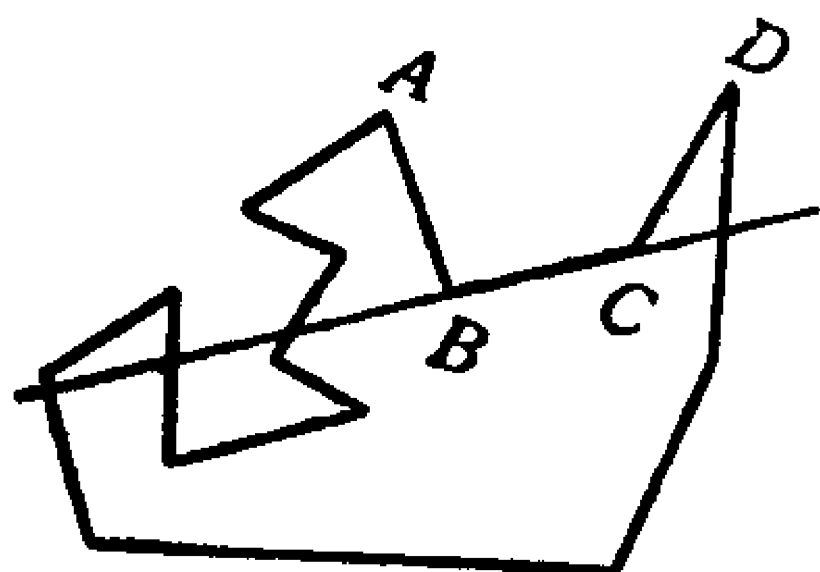


图101—1

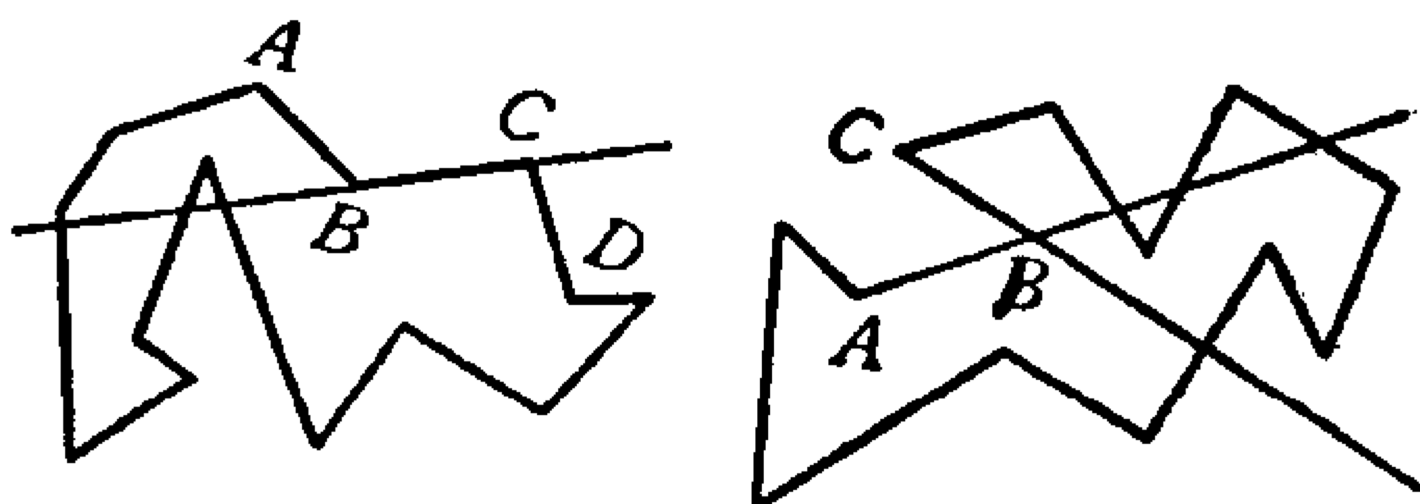


图101—2

但是，在每一条闭折线中有偶数个"之字形"：当走过这条折线并在每个顶点上指出拐弯的方向（向左拐还是向右拐）后，我们改变方向（从左往右以及从右往左拐）的次数是相同的。由这两个事实能得到此题的解。

如果利用下面这个事实证明要简单些：在把每两条相邻的边AB和BC向点B的方向延长后所得角的两条边与折线相交偶数次（图101－2）。

236．设在所标出的点X上写着数a_X，且经过这点有$n_X>1$条含有其它标出点的直线、根据已知条件，在其中每一条直线上的所有数之和等于0。那么，在所有n_X条直线上的所有数之和（在这个和中a_X出现n_X次）等于$S+(n_X-1)a_X=0$，其中S为在所标点附近所写数字之和。$S\neq0$的假设导致了明显的矛盾：对于每一个点

X，数a_X的符号与总和S的符号相反；因此$S=0$，且对于一切X有$a_X=0$。

237．结论2）在解第58题时已证．再利用两个类似的菱形（顶点为B、C）容易得到1）的结果．

238．答案：1）能；2）．8步（每一个游戏者各4步）．

图102表示了41个棋子的摆法．在每一个棋子旁边的数表示从游戏结束计算起它能被拿走所需要的步数，这个数也称为棋子的秩．现在来建立"从游戏结束"起的摆法是方便的．把两个秩为1的白棋子添加到最后剩下的那个秩为0的黑子上，在每一个白子的邻近添加两个秩为2的黑子（从两边添加），在每一个黑子的附近再添加两个秩为3的白子，等等．显然，在每一步中都给出了具有相应秩的且个数最多的棋子．因此对于每一步t，得到了一个具有最多个数棋子的摆法，它共有$a_t=b_t+w_t$个棋子，其中b_t表示黑子的个数，w_t表示白子的个数．这种摆法可能在t步之后变为只有一个黑子（$b_0=1$，$w_0=0$）；计算（b_t，w_t）的规则很简单：在从t步变到$t+1$步时，b_t、w_t中较大者不变化，再把较小数的两倍加到较小数上：

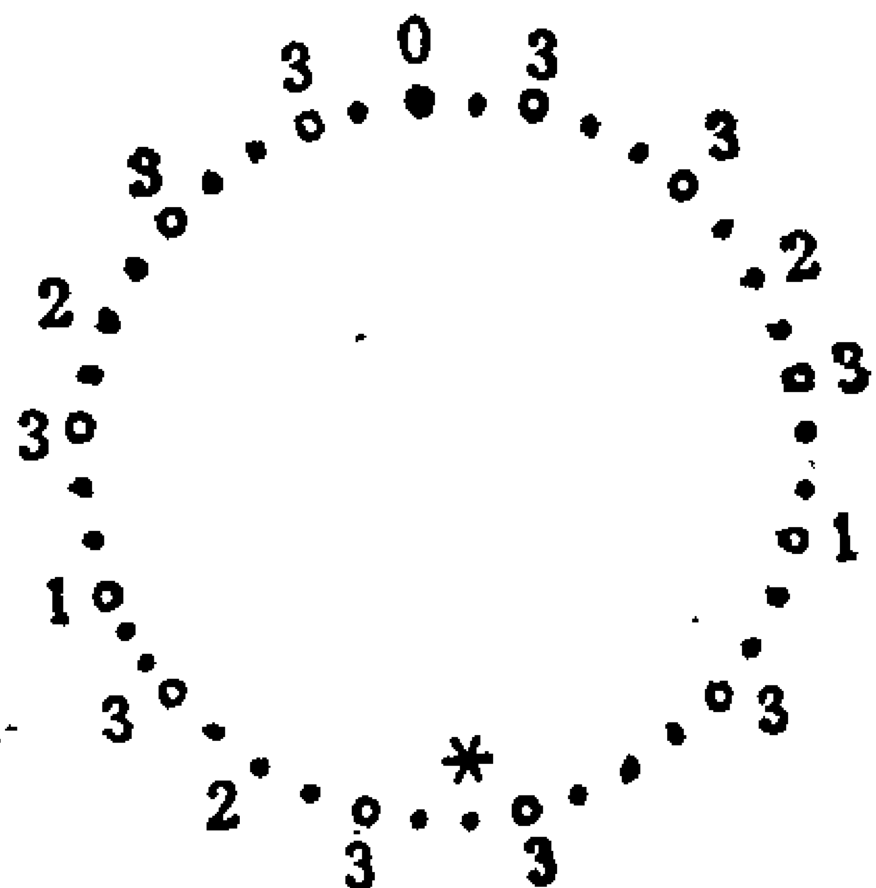


图102

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_t	1	1	5	5	29	29	169	169	985
w_t	0	2	2	12	12	70	70	408	408
a_t	1	3	7	17	41	99	239	577	1393

为了解1)，只要从图102的41个点中去掉一个不影响第一步之后局势的、秩为4的棋子，即与另一个棋子《4》相邻的棋子．

从1000个棋子变为1个棋子不可能少于8步，因为，正如从上

表中看到的那样，$a_7=577<1000$。正好1000个棋子的例子可以从$t=8$，且$a_8=1393$的最大摆法中去掉393个秩为8的棋子，而且这393个棋子不影响第一步之后的局势。这是可以做到的，因为有$2\cdot408=816$个秩为8的棋子在577个秩不大于7的棋子之中，它们至少构成$816-577=239$对毗连的棋子。

239．利用数列极限的定义。如果对于一切$n\geqslant N$和某个k，不等式

$$|a_n-a_{n+1}/2|<\varepsilon\text{及}|a_N|/2^k<\varepsilon$$

成立，则当$m\geqslant N+k$时有

$$|a_m|<\frac{1}{2}|a_{m-1}|+\varepsilon<\frac{1}{2^2}|a_{m-2}|+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon<\cdots$$

$$\cdots<\frac{1}{2^{m-N}}|a_N|+\frac{\varepsilon}{2^{m-N+1}}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon<$$

$$<\frac{1}{2^k}|a_N|+2\varepsilon<3\varepsilon.$$

240．我们在第一、第二两条线路的$n-1$个区间之间确定一一对应f，使沿着第一条线路的区间的乘行费用不高于沿着第二条线路的对应区间的乘行费用。我们用$t_i(A)$表示第i条线路的从城市A开始的“尾巴”（$i=1$，2），这是第i条线路中在城市A之后的若干城市的集合。用A'和A''分别表示在这条那条线路中直接在A之后的城市。

这样来定义f：如果AA'为第一条线路的区间，它使$t_1(A)$与$t_2(A)$相交，即有公共城市，那么设$f(AA')=AA''$。在相反的情形中设$f(AA')=BB'$，其中B为第二条线路中$t_1(A)$的最后一个城市。我们指出，在这种情形中$t_1(B)$与$t_2(B)$也不相交，同时A是第一条线路中$t_2(B)$的最后一个城市（由此得出，这个f是一一对应的，它的逆对应f^{-1}也用这个规则来确定）。

我们来验证$|f(a)|\geqslant|a|$，其中$|a|$表示在区间a乘行的价格。如果C为$t_1(A)$和$t_2(A)$的交点城市，则$|AA'|\leqslant$

$|AC| \leqslant |AA''|$，在第二种情形中 $|AA'| \leqslant |AB| = |BA| \leqslant |BB''|$（在两种情形中的不等式是由线路编制原则得出的：$|DA| \geqslant |AA'|$ 对于 $t_1(A)$ 中的任何 D 成立。对于 $t_2(A)$ 中的任何 E，有相反的不等式 $|EA| \leqslant |AA''|$）。

241．多面体的棱 AB 的两个相邻面的外接圆单一地确定球面 σ，使这两个外接圆在这个球面上，因此这两个面的所有顶点都在这个球面上．如果 BC 和 BD 是以 B 为端点的另外两条棱，那么含有点 B、C、D 的圆周（即含有这些点的面的外接圆周）也属于 σ．所以棱 BC 的邻面的一切顶点都在 σ 上．现在可以类似地研究以 C 为端点的棱的邻面．因为对于任何一个顶点都可以作一条从棱 AB 开始且结束于这个顶点的棱的链条，所以我们可以到达多面体的任何顶点．由此多面体的任何顶点都在球面 σ 上．

242．答案：第二个人能赢．为了证明应当出示能赢的战略．第二个人走4步之后显然能够做到：使当第一个人走到第5步时，剩下的小星星在奇次幂 x^{2l+1} 之前．假设在第二个人的第4步之前有多项式 $P(x) + *x^m + l*x^{2l+1}$，其中 $P(x)$ 为已知的实系数多项式．

我们挑选数 μ 和 $c>0$，使当 λ 取任何值时，对于多项式 $F(x) = P(x) + \mu x^m + \lambda x^{2l+1}$ 有 $cF(1)+F(-2)=0$（显然，$F(x)$ 在线段 $[-2; 1]$ 上有根，为此只要取 $c=2^{2l+1}$，$\mu=\dfrac{P(-2)-cP(1)}{c+(-2)^m}$（显然，其它的符号不同的两个数也能起1和－2的作用）．第四步摆上这个 μ 之后，第二个人能保证根的存在．

243．答案：$\frac{6}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{7}$，0升．

不难验证上述答案，因为第一个地精把奶分倒给其它地精后（给每个地精各倒1/7）仍然能得到原先的分配方案，但是因为依次移动了一个位置，和 $(1+2+3+\cdots+6)/7$ 正好等于3．

还要证明没有其它的答案．

假设不然，设在轮流倒奶期间当轮到某个地精Γ分倒奶时，它的奶最多，有x升，那么在7个地精依次轮流分倒后（因为可以无限地进行下去，所以可以认为Γ第一个倒奶），Γ的奶不超过$6\cdot x/6=x$升。如果其余6个地精都分倒给Γ正好$x/6$升，则Γ的奶恰好x升，于是由已知条件知，每个地精在轮到它分奶时都有奶x升，因而在它得到k份之后有$kx/6$升（$k=1,2,\cdots,6$）；而x可从总量为3升这个条件求得。

注　这个试题使我们回忆起迪斯涅夫斯基的电影《白雪公主和7个地精》中极漂亮的英雄，《Квант》的读者认为这是最好的试题之一。人们不难猜出这个题的答案，自然是假设在一次重倒之后，奶的分法仅仅是往前移动了一个位置。然而还需要证明解的唯一性（可以用许多不同的方法来做这件事）。

244. 1）答案：存在一个两位数49和一个四位数$1681=41^2$是奇数。

设$(10x+t)^2=100x^2+20xt+t^2$，其中$20xt+t^2$是小于10的自然数的平方，$x$、$t$是1至9的整数，且$x^2>10$。那么$x\geqslant4$，$xt\leqslant4$，仅当$x=4$，$t=1$时它们成立。

2）有。例如$256036=506^2$。　　3）为了得到形式为

$$(10^5x+1)^2=10^{10}x^2+2\cdot10^5x+1$$

的奇数，只要求整数x，使$10^9<x^2<10^{10}$，且$2\cdot10^5x+1=y^2<10^{10}$。可以取$x=5\cdot10^4-1$（所求的20位的“奇数”将是

$(4999900001)^2=24999000019999800001$；它由$49999^2$和$9999^2$“组成”。

4）对于任意k，$4k$位的奇数只能是

$(10^kx+t)^2=10^{2k}x^2+2\cdot10^kxt+t^2$。

当$10^{2k-1}\leqslant x^2<10^{2k}$时，我们得到$x>3\cdot10^{k-1}$，$6\cdot10^{2k-1}t<10^{2k}$，由此有$t=1$。同时，等式$2\cdot10^kx+1=(2u+1)^2$等价于$2^{k-1}5^kx=u(u+1)$，它成立只有三种情形：

（1）$u+1$能被$5\cdot10^{k-1}$整除。

（2）u能被2^{k-1}整除，$u+1$能被5^k整除。

（3）u能被5^k整除，$u+1$能被2^{k-1}整除。

每一种情形都给出至多一个解，它满足条件$u<5\cdot10^{k-1}$，而这个条件等价于$2u+1<10^k$（在情形（2）、（3）中，为了得到矛盾只要考虑两个解之差）。因此存在的奇点不多于3个。

注　更详细的推理（《Квант》，1978，№6，c. 46）表明，那样的数至多两个。

5）对于任意数k，至少存在一个（$4k+2$）位的奇数，即$z^2=v+w^2$，其中$v=25\cdot10^{2k-1}$，w为大于$\sqrt{v}$的最小自然数。设$y=w^2-v$；同时$z^2=4vw^2+y^2=10^{2k+1}w^2+y^2$由$w^2$和$y^2$"构成"，如果再满足不等式：

$0<y^2<10^{2k+1}$及$10^{2k}\leqslant w^2<10^{2k+1}$。那么它就是奇数。

因为$w-1<\sqrt{v}$和$(w-1)^2\leqslant v-1$，那么

$y<2\sqrt{v}$及$y^2<4v=10^{2k+1}$；此外，$10^{2k}<v<w^2=v+y<v+2\sqrt{v}<3v<10^{2k+1}$。

注　特别，当$k=7$时，借助于计算机可以求出数

$$z=25\cdot10^{13}+15811389^2=500000022109321$$

的平方是一个30位的奇数。而关于（$4k+2$）位的奇数的研究与$\sqrt{10}$的十进制表示法有关，这个问题的意义不大。

245. 把已知数按增大的顺序编号：$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$。

我们要证明，其中某些数之和s在$b_k/2$和b_k之间的某一区间中，这里$b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(k=1,2,\cdots,n)$，只要证明任意和$s$不可能严格在$b_k$和$b_{k+1}/2$之间即可。假设$s>b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，因而$s$包含某一个数$a_i\geqslant a_{k+1}$，所以$s\geqslant a_{k+1}$。我们得到了（把这些不等式相加）$2s>a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=b_{k+1}$，即$s>b_{k+1}/2$。

246. 1）我们把10个数字0，1，2，…，9分成两组各5个数字（例如从0至4为一组，从5到9为另一组），只要利用号码中

的两个数字取自同一组的那些匣子即可，因为三位数的号码中有两个那样的数字．

2）除了10个将被连续使用的匣子00，11，…，99外，还需要至少30个匣子来分放具有三个不同数字的票，那样的票共有$10\cdot9\cdot8=720$张，而放入每一个号码为$\overline{pq}$（$p\neq q$）的匣子中的票至多有$3\cdot8=24$张（即号码为$\overline{zpq}$，$\overline{pzq}$，$\overline{pqz}$的票，其中z为异于p、q的任何数字）．

3）设被占用的且号码以任何同一数字为首位数字的匣子最少个数为x个（$x\geqslant1$）．因所有数字都平等，我们可以认为首位数字为9的匣子最少，且号码为：$\overline{99}$，$\overline{98}$，…，$\overline{9y}$，其中$y=10-x$．那么任何号码为$\overline{9pq}$的票（$p<y$，$q<y$）不可能放在匣子$\overline{9p}$和$\overline{9q}$中，即应该匣子$\overline{pq}$被占用．于是至少y^2个匣子被占用，其号码的两位数字都从0到$y-1$；同时号码的首位数字为从y到9的匣子至少x^2个（因为对于从y到9的这x个数字中的每一个数字都至少有x个匣子），即总共至少占用

$$y^2+x^2=(10-x)^2+x^2\geqslant50\text{个匣子}.$$

4）、5）对于已知的自然数k和s，$k<s$，用$F(k,s)$表示数$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2$中最小的数，其中x_1、x_2、…、x_k是自然数．它们的和等于s。我们可以用k、s来表示$F(k,s)$：如果$s=kq+r$，$0\leqslant r<k$，那么有$(k-r)$个x_k等于q，且r个x_k等于$q+1$，所以

$$F(k,s)=(k-r)q^2+r(q+1)^2=kq^2+r(2q+1).$$

现在来研究更一般的问题．对于号码为k位数的，而且有从0到$s-1$这s个“数字”的“票”（这里$s=10$），我们要证明，号码为$\overline{pq}$（$0\leqslant p<s$，$0\leqslant q<s$，且$\overline{pq}$是由票的号码删去两位数字得到，及这样的票能放进号码为$\overline{pq}$的匣子）的匣子的最少个数$M(k,s)$等于$F(k-1,s)$．

特别，$M(4,10)=F(3,10)=3^2+3^2+4^2=34$．

5）的答案由下列表格给出：

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(k, 10)=F(k-1, 10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10

不等式$M(k, s)\geqslant F(k-1, s)$可以用对$k+s$的归纳法证明，如在3）中那样进行推理：

$$M(k, s)\geqslant\min_{x=1,2,\cdots s}(M(k-1, s-x)+x^2).$$

为了把票分放到$F(k-1, s)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{k-1}^2$个匣子中去，只要如在1）中那样把$s$个数字分成$k-1$组（各$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$个数字）并利用那些号码中的两个数字出自一组的匣子。

247．我们把所有结点按照国际象棋的次序涂成黑色和白色。在边界上有$4\cdot 99$个结点（不计算顶点)，且黑的和白的个数相等。设它们都是折线的端点，那么具有两个白端点和两个黑端点的折线的条数相等。因此在棋盘内部折线上的黑结点和白结点的总数也相等（在有白端点的折线上多一个黑结点，在有黑结点的折线上多一个白结点）。然而在棋盘内部共99^2（奇数）个结点，所以至少一个结点不在折线上。

248．由已知条件得到

$$s=x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

的值不小于2（因为$m\leqslant s$，$n\leqslant s$，$s<mn$）．在$m=n=2$时，$2\leqslant s\leqslant 3$。容易验证此题的结论．我们用对$m+n=k$的归纳法来证明它的一般情形，其中$k\geqslant 4$。

设$x_1>y_1$，且x_1、y_1分别是x_i和y_j中最大的数（$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$；显然有$x_1=y_1$）．为了把归纳假设用到等式

$(x_1-y_1)+x_2+\cdots+x_m=y_2+\cdots+y_m$，它的两边共有$k-1=m+n-1$个数（此后还要把$y_1$移到右边），只要验证不等式$s'=y_2+\cdots+y_n<m(n-1)$即可；因为$y_1>s/n$，所以$s'<s-s/n=mn(n-1)/n=m(n-1)$．

249．从已知正方形中选取一个最大的K_1，然后再从中心不

在K_1内的那些正方形中选最大的K_2，再从中心不在K_1、K_2内的那些正方形中选最大的，等等。

我们假设某一个正方形的中心C落到上面所选的4个以上的正方形之中，那么其中某两个（K_i和K_j）的中心落到由中心为C的正方形之对称轴所分成的1/4平面中。

K_i、K_j之中那个中心距以C为中心的正方形对称轴较远（按到正方形的两对称轴距离之和或按其中较大的距离计算）的正方形包含另一个正方形的中心，但这与正方形的选取规则矛盾。

250．设砝码的重量为$m_1<m_2<\cdots<m_n$。

1）我们这么来放砝码：把m_1放到左边的盘子中去，然后把m_2放到右边的盘子中去，接着m_3放到左边、m_4放到右边等等。同时称量结果的序列是$LRLRLR\cdots$。这可以由下面这个引理得出。

引理．如果$0<m_1<m_2<\cdots<m_{k-1}<m_k$，那么两个和（它们包含已知的$n$个数）：

$$m_1+m_3+m_5+\cdots\text{与}m_2+m_4+m_6+\cdots$$

谁大谁小取决于最大的数m_k在哪个和之中。

当k为偶数时，只要把不等式$m_1<m_2, m_3<m_4, \cdots, m_{k-1}<m_k$加起来就能得到证明。而当$k$为奇数时，把不等式$m_1>0$，$m_3>m_2$，$\cdots m_k>m_{k-1}$加起来就能得到证明。

这个引理也适用于2），只要把它应用到满足$m_l<m_{l+1}<\cdots<m_{k-1}<m_k$的$k-l+1$个数$m_l\cdots m_k$即可。

2）我们从单词的"末尾字母开始"来描述摆放砝码的次序对于解题是方便的，这个次序对应于由字母L和R组成的词。

我们把具有偶数号码的砝码放到一个盘子中，而把奇数号码的砝码放到另一个盘子中。同时与已知词的最后一个字母相对应，而把最重的砝码m_n放到左边或右边的盘中。然后，在从词的一个字母变到前一个字母时，如果应该发生字母替换(用k换L或者

用L换k)，我们就把最重的砝码取下来；如果不发生字母替换，我们就把最轻的取下来。同时，每一次形成由交替在两个盘子中出现的砝码组成的线段，再把引理应用到这条线段上。

251．1）答案：多项式$Q_1(x)=x$、$Q_2(x)=p(x)$与多项式$P(x)=x^2-\alpha$可交换，α任意。与$x^2-\alpha$可换的3次多项式，当$\alpha=0$时为$Q(x)=x^3$；当$\alpha=2$时为$Q(x)=x^3-3x$。

关于不存在其它的可交换多项式的证明，可直接应用比较系数的方法。例如，对于3次的多项式，恒等式

$$(x^3+\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3)^2-\alpha$$
$$=(x^2-\alpha)^3+\beta_1(x^2-\alpha)^2+\beta_2(x^2-\alpha)+\beta_3$$

成立，如果$\beta_1=\beta_3=0$（比较x^5、x^3和x的系数），$2\beta_2=-3\alpha$（比较x^4的系数），$\beta_2^2=3\alpha^2+\beta_2$(比较$x^2$的系数)，$\alpha=\alpha^3+\beta_2\alpha$（比较常数项）。由此，或者$\alpha=0$，$\beta_2=0$，或者

$$\beta_2=-3\alpha/2=1-\alpha^2=\beta_2^2-3\alpha^2;$$

无论多么奇怪，具有两个未知数的3个方程有解$\alpha=2$，$\beta_2=-3$。

2）不难验证，在同时变换两个可换多项式$P(x)$和$Q(x)$时：

$P(x)\to P^*(x)=P(x-\gamma)+\gamma$，$Q(x)\to Q^*(x)=Q(x-\gamma)+\gamma$，（$\gamma$为某一个数），所得到的多项式$P^*(x)$和$Q^*(x)$也可换（如果把多项式作为将数轴变为自身的函数来研究，那么上述的变换对应着把直线的原点移动γ）。而任意首项系数为1的二次多项式可以用所指出的变换变为形式$P^*(x)=x^2-\alpha$。因此可以认为$P(x)=x^2-\alpha$，因而我们可像在1）中那样去做。

我们写出恒等式$(Q(x))^2-\alpha=Q(x^2-\alpha)$的关于系数$\beta_1$、$\beta_2$、…、$\beta_k$的方程组，其中$Q(x)=x^k+\beta_1x^{k-1}+\beta_2x^{k-2}+\cdots+\beta_k$，我们首先得到等式$\beta_1=\beta_3=\cdots=0$，以及形式为$\beta_2=F_2$，$\beta_4=F_4$，…的方程，其中$F_i$依赖于$\alpha$和$\beta_{2j}$，$2j<i$。所以系数$\beta_2$，$\beta_4$，…可求出，（仅由$x^{2k-2}$、$x^{2k-4}$、…、$x^2$及

常数项的系数对应相等而得到k个方程中取 $[k/2]$ 个来求 β_2；而其余的条件可以不成立）。

3）这是$P(P(x))$和$P(P(P(x)))$。

4）把$P(Q)$、$P(Q(R))$写成$P\circ Q$、$P\circ Q\circ R$。根据已知条件有$Q\circ P=P\circ R$，$R\circ P=P\circ R$，由此有$(Q\circ R)\circ P=Q\circ R\circ P=Q\circ P\circ R=P\circ Q\circ R=P\circ(Q\circ R)$，
$(R\circ Q)\circ P=R\circ Q\circ P=R\circ P\circ Q=P\circ RQ=P\circ(R\circ Q)$。
我们看到，多项式$Q\circ R$和$R\circ Q$都与P可交换。因为它们次数相同（R的次与Q的次之乘积），由2）它们是一个多项式。

5）用数学归纳法可证明：对于任意$k\geqslant 2$存在k次的多项式P_k，使

$$t^k+\frac{1}{t^k}=P_k\left(t+\frac{1}{t}\right);$$

特别有 $t^2+\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2$，

$$t^3+\frac{1}{t^3}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

所以$P_2(x)=x^2-2$，$P_3(x)=x^3-3x$。同时

$$t^{mn}+\frac{1}{t^{mn}}=P_m\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)=P_n\left(t^m+\frac{1}{t^m}\right)$$

$$=P_m\left(P_n\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_n\left(P_m\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_{mn}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

由这些恒等式得到$P_m\circ P_n=P_n\circ P_m=P_{mn}$。

注　这些多项式可用切贝雪夫多项式T_k的简单变量替换得到，切贝雪夫多项式定义为

$\cos k\varphi=T_k(\cos\varphi)$，$k=2, 3, \cdots$；$P_k(x)=2T_k(x/2)$。

252。答案：88。

每一个数$k=1, 2, 3, \cdots$在数列$\{a_k\}$中出现$2k$次，因为条件$a_n=k$等价于

$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$，或者$k^2-k<n\leqslant k^2+k$。因此在和

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{a_{44\cdot 43+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{44\cdot 45}}\right)$$

中的每一个括号（共44个括号）都等于$2k\cdot 1/k=2$。

第十二届

253．设E为三角形ADE的顶点，ADE是由平移三角形BMC得到的（见图103，平移一个向量$\overrightarrow{BA}$）。那么$MDEC$是平行四边形，$\angle EAD$、$\angle CBM$、$\angle CDM$、$\angle ECD$都相等，而且点A、C、E和D在一个圆周上，所以$\angle ACD$、$\angle AED$和角BCM也相等。

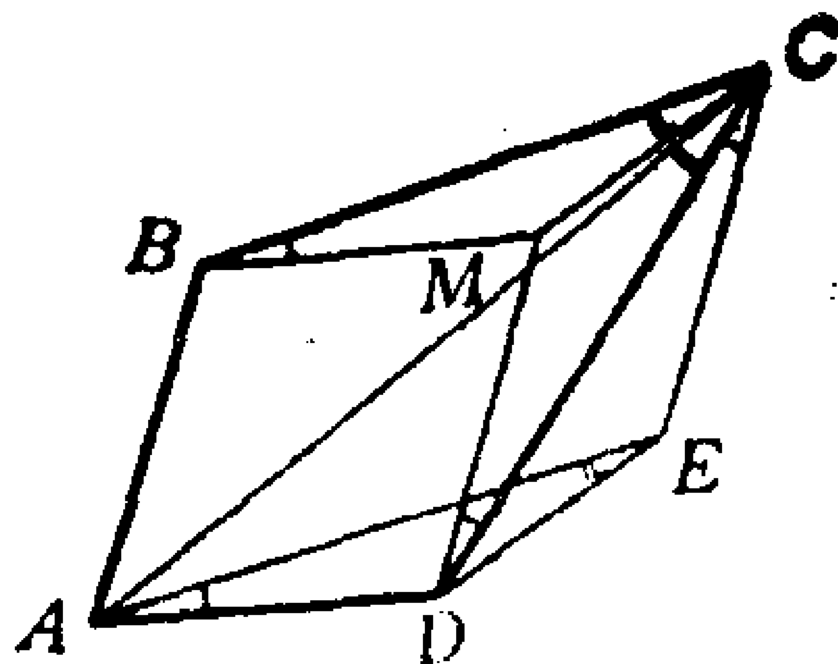


图103

254．如果1978^m-1能被$1000^m-1=d$整除，那么$1978^m-1000^m=2^m(989^m-500^m)$就能被$d$整除。但这是不可能的，因为$989^m-500^m<d$，而且$d$是奇数。

255．1）$n=7$。

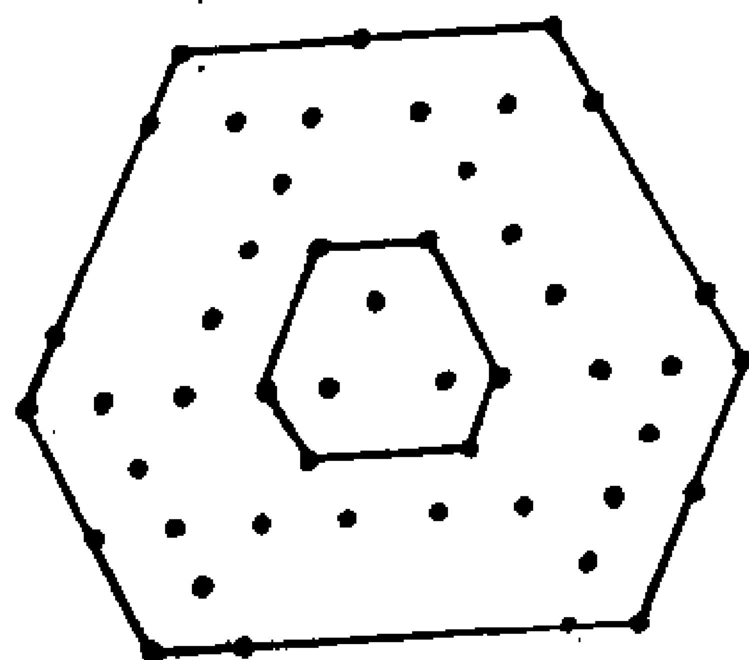
集合K_n由直线AB上与点A、B有整数距离的那些点所构成，同时它的边界点与线段AB中点的距离等于$3^n/2(n=1,2,\cdots)$，即与点A的距离等于$(3^n-1)/2$和$(3^n+1)/2$。因为$(3^6+1)/2=365<1000$，而$(3^7+1)/2>1000$，所求的集合是K_7。

2）集合K_1、K_2、…的凸壳是六边形（图104-1）。凸壳K_n的顶点这么得到：取三角形ABC的任意两个顶点，如同在1）

中那样对它们作n次“对称”映射.

为了证明K_n的所有点在由六个“极点”构成的凸壳H_n中，把H_n看作是边界在六边形H_n的对边上的三条带形之交是方便的（$n=1, 2, 3, \cdots$）. 初始三角形ABC也可以看做三条带形的交集；其中一带形的一条边界在直线AB上，另一条边界经过C点；另外两条带形类似.

而带形关于它的任意一点的对称映像属于具有同一对称轴的带形，但是宽度增加到原来的3倍. 利用这些可以证明K_n($n=1, 2, 3$)都属于其交集是H_n的三条带形之一.


图104—1

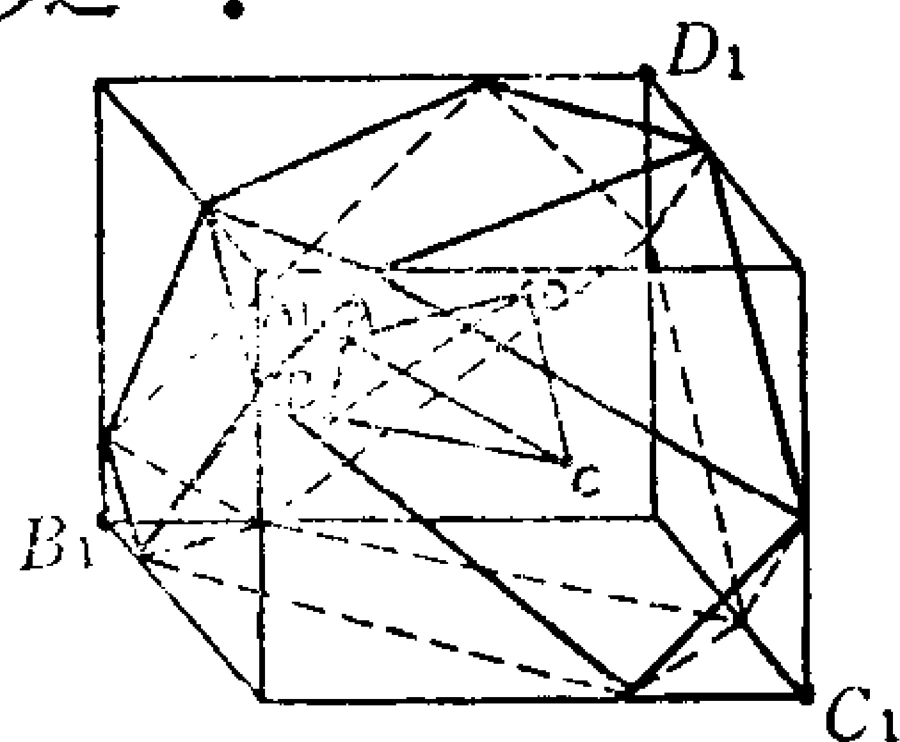


图104—2

H_n的面积可以用与三角形ABC同位相似的三角形面积的组合来计算，它等于$(3^{2n+1}-1)/2$.

3）除K_0的点外，集合K_1还包含12个点，这12个点是由四面体$ABCD$的一个顶点关于另一个顶点的映像得到的. 我们作立方体L_0，它的顶点A、B、C、D是不相邻的顶点；L_0关于中心且系数为3的同位相似的立方体L_1有相应的顶点A_1、B_1、C_1、D_1. 这时来表示K_1的12个“极端点”是方便的：K_1的12个点各在L_1的一条棱上，并把这些棱分成1：2两部分（从顶点A_1、B_1、C_1、D_1计算起）. 如果在L_1的每个顶点用一个平面切去一个锥体，那么剩下的多面体M_1就是K_1的凸壳，而所用的平面通过从每个顶点出发的三条棱上的三个“极端点”. M_1有14个面：6个$a\times 2a$的矩形（这里a为四面体$ABCD$的棱长），8个正三角形（4个边长为a和4个边长为$2a$）（图104-2）.

4）M_1的体积可以计算，只要从立方体的体积（81）中减去所切下的所有锥体的体积（$4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot4=18$），因此$M_1$的体积等于63。

5）集合K_n的凸壳M_n是顶点在12个"极端"点上的凸多面体，而这12个点是由对于四面体$ABCD$的每两个顶点所作出的。M_n的顶点各在立方体L_n的一条棱上，并把每一条棱分成(3^n-1)：(3^n+1)的两部分，L_n由L_0用系数为3^n的中心同位相似得到。在证明中研究其交集为M_n的7条带形是方便的，其中每一条带形是由边界含有四面体$ABCD$的4个顶点的带形膨胀到3^n倍的方法得到。M_n的体积等于$(5\cdot3^{3n}-3^{n+1})/2$。

256．1）设$m\geqslant2n$．我们要证明第一个人可以在(m,n)布局中走这么一步，使所得的布局对于第二个人来说是输的．如果布局$(m-n,m)$是输局，那么所求的走法是$(m,n)\to(m-n,m)$；如果这个布局是赢的，那么在其中存在使它变为输局的走法．因为$m-n\geqslant n$，这一走法有形式$(m-n,n)\to(m-kn,n)$，其中k是某个自然数．那么，所求的使第一个人赢的走法是：$(m,n)\to(m-kn,n)$．

有趣的是这里能够证明布局(m,n)在$m\geqslant2n$时是赢的布局。

2）答案：当$\alpha\geqslant(1+\sqrt{5})/2$时．

我们把每一个布局(m,n)与数轴上的点$x=m/n\geqslant1$对应，其中$m\geqslant n$，在每一步中，点x向左移动某个整数k；如果点x在区间$0<x<1$中，则把它代之以倒数：$x\to1/x$；如果点x在0上，则是输局．在数轴上我们标出长为1的线段$[1/\beta;\beta]$；当$\beta=(1+\sqrt{5})/2$时，$\beta-\frac{1}{\beta}=1$．在这条线段内部的点$x=m/n$对应于输的布局，在这条线段右边的部分是赢的布局．事实上，可以用通常的（赢的）走法从那样的点落到这条线段中；如果$1<x<\beta$，则通常的走法不会落到线段中去；而如果$x=1$则导致败

局。因为在火柴盒中火柴的根数在减少，若干步之后游戏一定能结束。

257。满足此题要求的数列是$4\{n\sqrt{2}\}$，其中$\{x\}=x-[x]$是x的分数部分（$n=1, 2, 3, \cdots$）。事实上，如果p和q是自然数，$p<(4-\sqrt{2})q$，则

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|2q^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2}.$$

因此当$n>k\geqslant 1$时

$$|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}|=|(m-k)\sqrt{2}-l|>\frac{1}{4(m-k)}$$

其中$l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}+1$
$\leqslant(m-k)(\sqrt{2}+1)<(4-\sqrt{2})(m-k)$。

注　这里利用了以下事实：分母不大的分数不能很好地近似于无理数$\sqrt{2}$。

这个题的其它解法，例如借助于十进制分数的序列的方法，（见《Квант》1979，5，c，24）是很繁的。

258。因为$f(1)=f(0)=1$，那么多项式$P_n(x)=f(f(\cdots(f(x))\cdots))$的自由项$P_n(0)$等于1。所以对于任意整数$n$，$P_n(m)$除以$m$的余数等于1。

这里用$m'=P_k(m)$代替m后，我们得到$P_{n+k}(m)$与$m'=P_k(m)$互质。

注　用下面这个事实能立即得到质数集合是无穷集合：存在一个数列（$P_n(2)$），它的所有项两两互质。

259。函数$y=\sin x$绕着坐标原点旋转90°后得到象$x=-A\sin y$。设M是$y=\sin x$与它的象$x=-A\sin y$之交集中的任何一点(图105)，那么点M与它绕点O旋转90°、180°和270°所得的象点K、L和N一起属于$y=A\sin x$的图象。所以正方形$MKLN$内接于已知的图象。当A足够大时，可以用至少1978种方法来选择

图象交集之点M，同时它们与点O的距离不相同．例如，当$A>1978\cdot2\pi$时可以在第k个初始波与第k个象波交集中各取一个点（波的起点为0）．这里要利用连续函数的根的存在定理；由它不难得到：在上述所指出的部分中函数图象相交．

260．1）答案：可以．

首先得到卡片（1；8）：

（5；19）→（6；20）→（3；10）→…→（10；17）→（3；17）

→（4；18）→（2；9）→…→（9；16）→（2；16）→（1;8），

而从中容易得到卡片（1；15），（1；22），…，（1；$1+7k$），k为任意自然数．

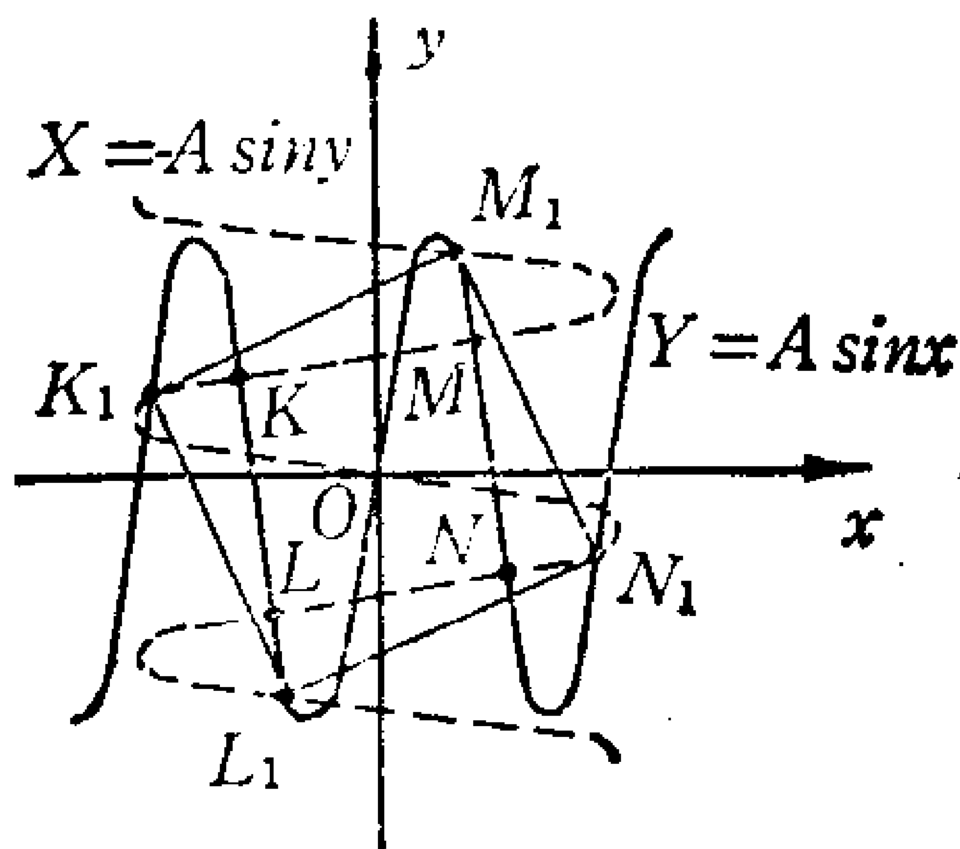


图105

2）答案：不可能．

在任何运算中，卡片上的数之差都能被7整除．

3）答案：设d为$b-a$的最大的奇数的因数，那么仅当$n=1+dk$（k为某个自然数）时，从卡片（a；b）可以得到卡片（1；n）．

这个条件的必要性是显然的（其证明与2）的证明类似）．现在只要证明，从（a；b）可以得到（1；$1+d$）．如果a和b的奇偶性相同，那么将完成以下运算：（a；b）→（$\frac{a}{2}$；$\frac{b}{2}$）或者（$\frac{a+1}{2}$；$\frac{b+1}{2}$）；它给出了其差缩小1/2的两个数，等等．对(a;

$a+d$）可以进行以下一系列运算：

$$(a;\ a+d)\to(a+d;\ a+2d)\to\begin{cases}\left(\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a}{2}+d\right)\\ \text{或者}\end{cases}$$

$$\to(a;\ a+2d)\to\left(\frac{a+1}{2};\ \frac{a+1}{2}+d\right)$$

它给出了其差相等的两个数，然而当$a>1$时数变小了．重复这一系列运算，如同1）的例子那样，能得到（$1;\ 1+d$）．

261．设A_i为内接n边形的顶点($i=1,2,\ \cdots,\ n$)；b_i为连接这个多边形边上两个标出点的线段，O为圆的圆心(图106)，S_i和S'_i是分别以A_i和O为顶的、且都以b_i为底的三角形之面积．同时，如果A_i与O在含有b_i的直线的两侧，S_i'取负号．那么，对于每一个i有$S_i+S_i'\leqslant b_iR/2$，而且$S_1'+S_2'+\cdots+S_n'$等于以所标出的点为顶点的多边形之面积（S_i'取正号或者负号表明，能在里边或外边从点O看到b_i)。因此$S=S_1+S_2+\cdots+S_n+S_1'+S_2'+\cdots+S_n'$

$$\leqslant(b_1+b_2+\cdots+b_n)R/2.$$

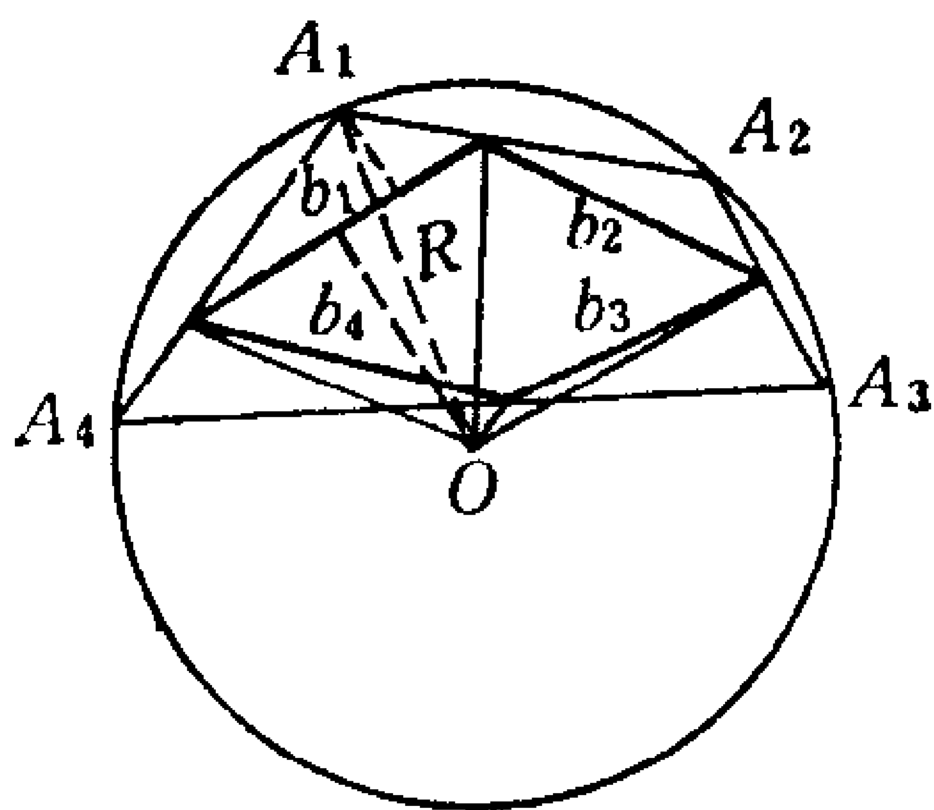


图106

262．1）如果n为偶数，则可以把整个棋盘分成尺寸为1×2个格子的若干矩形（“多米诺”）．如果先走的人奉行以下策略他就一定能赢：如果棋子在某个多米诺的一个格子中，那么就把它放到这个多米诺的第二个格子中去（“关”上多米诺）．

如果n为奇数，那么除去一个初始格子即角上的一个格子外，可以把棋盘的其余一切格子分成多米诺．现在，类似的策略对于第二个人来说是赢的策略．

2）先走的人始终能赢．当n为偶数时，策略同1）．当n为奇数时，需重新把所有格子（除去角上的格子）分成多米诺；把

棋盘按国际象棋的次序涂色后，容易证实第二个人任何时候也不能走到角上的格子中去．因此第一个人如果奉行“关闭”多米诺的策略，他一定能赢．

263．答案：不总能做到这一点．

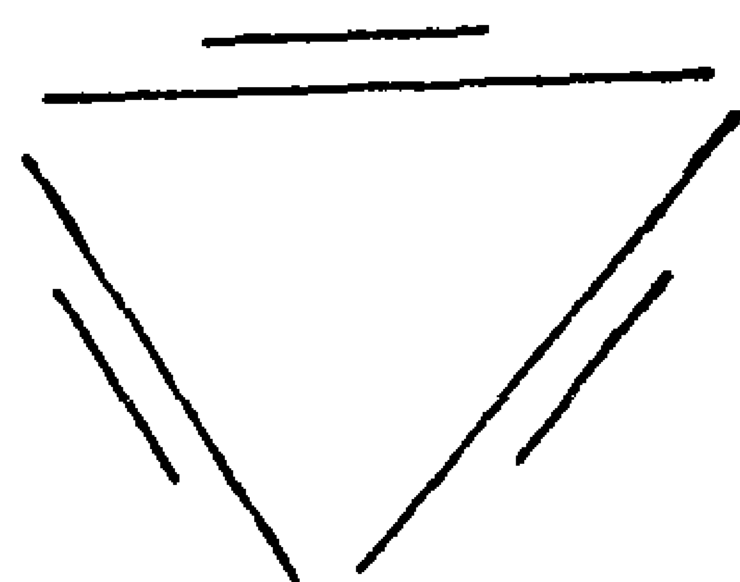


图107

在图107中表示的是6条线段的例子：3条长线段和3条短线段，它们不能用所需的方式构成不自相交的闭折线．事实上，有一条短线段不是折线开头或结尾的线段，但是它的端点可以仅与邻近的长线段的端点相连接．

264．解法1．利用不等式$ab\leqslant(a+b)^2/4$，对于任意$c>0$，我们有

$$P=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$=\left(\frac{x_1}{c}+\cdots+\frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1}+\cdots+\frac{c}{x_n}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c}+\frac{c}{x_1}+\frac{x_2}{c}+\frac{c}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{c}+\frac{c}{x_n}\right)^2.$$

注意到，函数$f(t)=\frac{c}{t}+\frac{t}{c}$一定在区间$[a,b]$的端点上达到最大值．我们选取使$f(a)=f(b)$的$c$，即取$c=\sqrt{ab}$．那么当$a\leqslant t\leqslant b$时有$f(t)\leqslant\sqrt{a/b}+\sqrt{b/a}$．因此有$p\leqslant n^2(\sqrt{a/b}+\sqrt{b/a})^2/4=n^2(a+b)^2/4ab$.

解法2．我们把重量相同的重物分放到横坐标为x_1、x_2、…、x_n的点上，这些点的坐标满足双曲线方程$y=\frac{1}{x}$，$a\leqslant x\leqslant b$．这些重物的质量中心，即横坐标为$p=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$，纵坐标为$q=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)/n$的点将在由双曲线的弧与连结它的端点的线段所约束的弓形中．显然，应当在弓形的上边界这条线段中寻找使pq为最大的点(p,q)（图108）．

对于含有这条线段的直线上之点(p,q)来说，q可记为p

的线性函数，那么pq将是p的二次三项式（在$p=0$时它等于0）．当$p=a$，$p=b$时它有相同的值$a\cdot\frac{1}{a}=b\cdot\frac{1}{b}=1$．所以在这两个点连线的中点它有最大值$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)/4$，由此得出所需要的不等式．

注　从第二种解法容易得到一个附带的结果：任何直线落在双曲线$y=1/x$和它的渐近线之间的线段都相等（在图中用虚线表示的部分）．

现在回到最初的问题．当n为偶数时，不等式给出了精确的估计；当n是奇数时，可使它更精确些．（当$n=5$时，这是不久前美国奥林匹克竞赛的一道题．

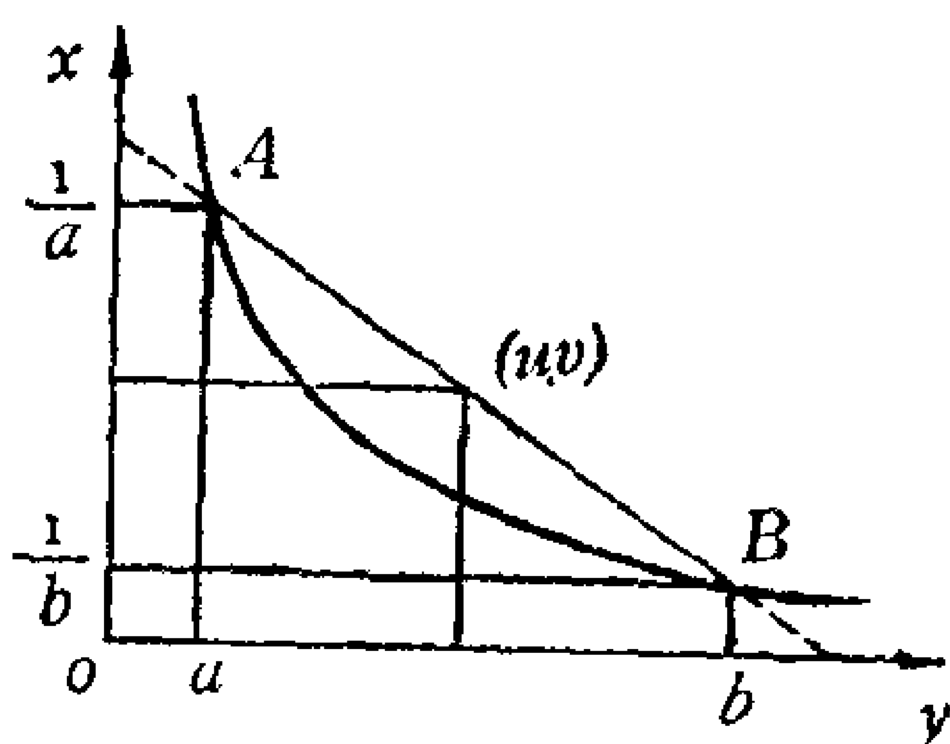


图108

265．可以取由点$A_k=(k, r(k))$构成的集合作为所求的集合，$k=0, 1, 2, \cdots, p-1$，$r(k)$表示k^2除以p的余数．当$p=7$时，这个集合表示在图109中．

如果某三个点A_l、A_m、A_n（$l<m<n<p$）在一条直线上，则以下关系成立：

$$\frac{r(m)-r(l)}{m-l}=\frac{r(n)-r(m)}{n-m}$$

即对于某些整数a、b，等式$(n-m)(m^2-l^2+ap)=(m-l)(n^2-m^2+bp)$成立．把不包含$p$的项移到等式左边，我们看到$(n-m)(m-l)(n-l)$能被$p$整除．因为$p$是质数，这是不可能的．

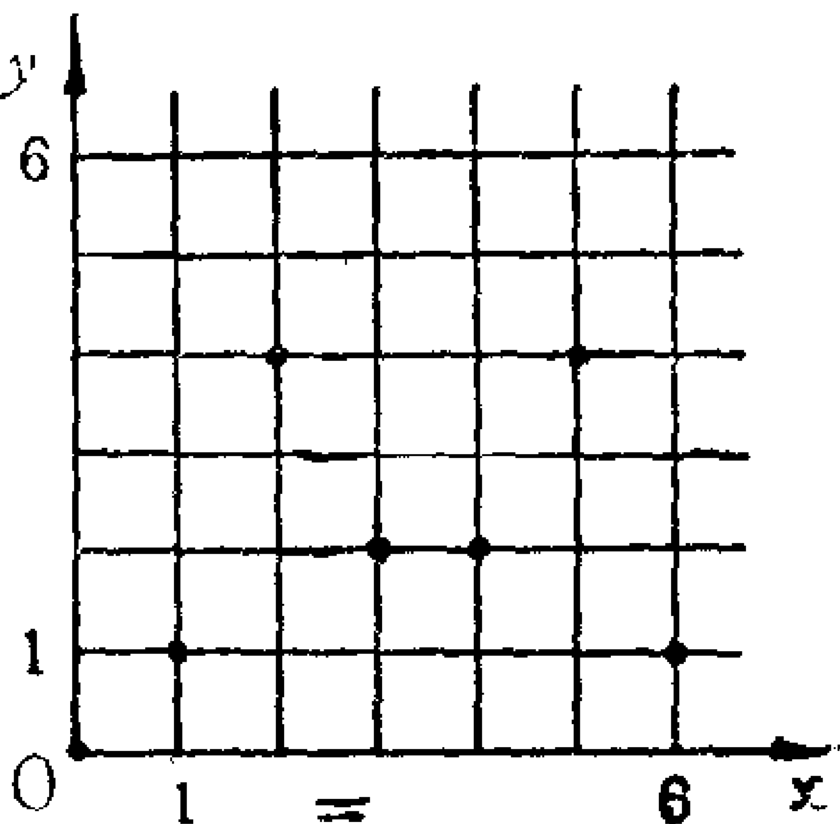


图109

如果某4个点A_k、A_l、A_m、A_n在平行四边形的顶点上，$\overrightarrow{A_kA_l}=\overrightarrow{A_nA_m}$，那么有

等式$l-k=m-n$，及$r(l)-r(k)=r(m)-r(n)$，即$(l^2-k^2)-(m^2-n^2)$能被p整除。那么

$$(l+k)-(m+n)=2l-2m,$$

因为$p>3$，$l-m$也应该被p整除。然而这是不可能的。

266. 我们过四面体的两条相对的棱作互相平行的平面p和p'. 设h为它们之间的距离。我们将只研究四面体对垂直于平面p的那些平面q的投影，并已在其中找到面积之比不小于$\sqrt{2}$的两个投影。四面体对平面q的投影是梯形，其底为a'_q和b'_q，a'_q、b'_q分别是a、b对平面q的投影，高为h（如果棱a、b之一的投影是一个点，则梯形退化为三角形）；投影的面积等于$(a'_q+b'_q)h/2$. 为了能够看出这个值如何依赖于棱a、b对平面q的倾斜度，我们来研究由四面体的棱表示的向量$\vec{a}$和$\vec{b}$（图110）。显然可以认为$a\geqslant b$，且向量$\vec{a}$、$\vec{b}$之间的夹角不超过90°. 把它们移到一个顶点O上，那么我们就可以不说四面体的棱对面q的投影的长度，而说向量$\vec{a}$、$\vec{b}$对直线（在平行于p和p'的平面上的

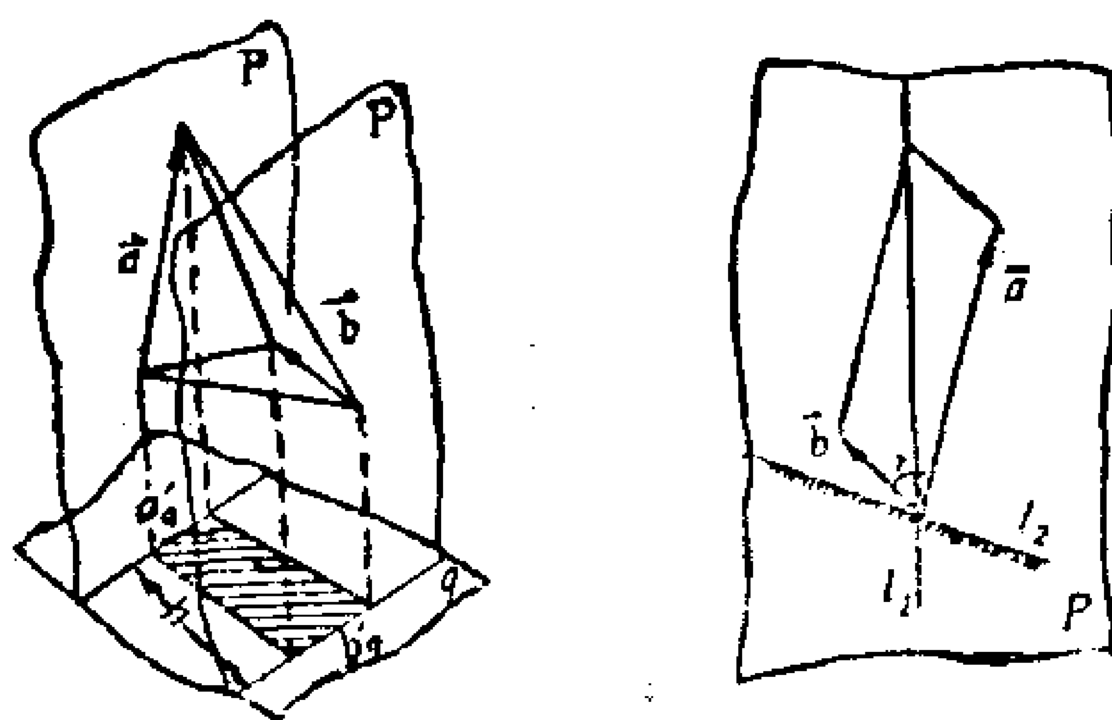


图110

直线）的投影的长度. 对平行于向量$\vec{a}+\vec{b}$的直线l_1的投影之和等于$|\vec{a}+\vec{b}|$，对垂直于$\vec{a}$的直线l_2的投影等于$b\sin\gamma$，这两个值的比不小于$\sqrt{2}$：

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=a^2+b^2+2ab\geqslant a^2+b^2\geqslant 2b^2\geqslant 2b^2\sin^2\gamma.$$

注　我们顺便指出，对于正四面体$\sqrt{2}$是最好的估计；它的任何投影之面积界于$a^2/2$和$a^2/(2\sqrt{2})$之间，其中a为棱的长度.

267. 设

$$f(x)=(x-a_1)^2+\cdots+(x-a_n)^2.$$

在这个二次三项式中分出完全平方后，得

$$f(x)=n(x-b_n)^2+f(b_n) \qquad (*)$$

在验证这个等式时应当注意到$nb_n=a_1+\cdots+a_n$.

当$n=1$时，所要的不等式显然成立($C=D$)。利用数学归纳法证明一般情形时只要证明不等式

$$0\leqslant f(b_{n+1})-f(b_n)\leqslant(a_{n+1}-b_{n+1})^2.$$

因为在把数a_{n+1}添加到a_1、a_2、…、a_n上时C的值增加了$(a_{n+1}-b_{n+1})^2$，而D增加了$(a_{n+1}-b_{n+1})^2+f(b_{n+1})-f(b_n)$。左边的不等式立即可从(＊)中取$x=b_{n+1}$得到；右边的不等式由下列等式得到：

$$(n+1)b_{n+1}=nb_n+a_{n+1},\quad n(b_{n+1}-b_n)=a_{n+1}-b_{n+1},$$

$$f(b_{n+1})-f(b_n)=n(b_{n+1}-b_n)^2=(a_{n+1}-b_{n+1})^2/n.$$

注　把到n个点的距离平方和表示为到它们的"质心"（或平均值）的距离平方的恒等式（＊）常在概率论、统计学中用到，而它在平面上及空间中类似的等式常在几何中用到。

268. 我们来研究$\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$的共轭数$\lambda_2=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\lambda_3=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$，$\lambda_4=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$，这些共轭数与$\lambda_1$的区别在于根式的符号不同。如果$\lambda_1^n=q^n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$，那么可以依次验证

$$\lambda_2^n=q^n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_3^n=q^n+r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_4^n=q^n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6},$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots.$$

把这4个等式相加后再用$4\lambda_1^n$去除这个和，然后取极限，我们得到$\lim(q_n/\lambda_1^n)=1/4$，因为当$j=2$、3、4、…时$|\lambda_j|<\lambda_1$。因

此$\lim(|\lambda_i|^n/\lambda_1^n)=0$。把另外3个等式中的任何一个加到第一个等式上并减去另外两个等式，得到

$$\lim(r_n\sqrt{2}/\lambda_1^n)=\lim(s_n\sqrt{3}/x_1^n)=\lim(t_n\sqrt{6}/\lambda_1^n)=1/4.$$

(于是对于大的n，$q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$中所有加数几乎彼此相等！)．由此我们得到

$$\lim_{n\to\infty}(r_n/q_n)=1/\sqrt{2},\quad \lim_{n\to\infty}(s_n/q_n)=1/\sqrt{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}(t_n/q_n)=1/\sqrt{6}.$$

注　我们顺便指出，在此题中如果用任意数$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$($a$、$b$、$c$、$d$是自然数)代替$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$，也能得到同样的答案．

第十三届

269．答案：1/5．

需要研究两种情形：较小三角形的直角顶点或者在较大三角形的斜边上，或者在较大三角形的直角边上．在第一种情形中，两个三角形的直角边之比不小于1/2，而它们的面积比等于1/4．在第二种情形中，固定较小的三角形并利用大三角形的顶点跑遍圆周的一段圆弧可以得到纯几何解释；也有分析解法：如果较小三角形的直角边对较大三角形直角边的投影分别等于x、y(图111)，那么$x^2+y^2=a^2$，而大三角形的直角边等于$2x+y\leqslant\sqrt{5}a$．

270．答案：不能从它跳到“无穷远”的那些点的集合之面积等于15，这是一个阶梯式的图形T，见图112．

从T外的任何点可利用若干步$(1,-1)$而到达$x\geqslant5$的区域中，然后再按$(-5,7)\pm5(1,-1)=(0,2)$的方式跳．

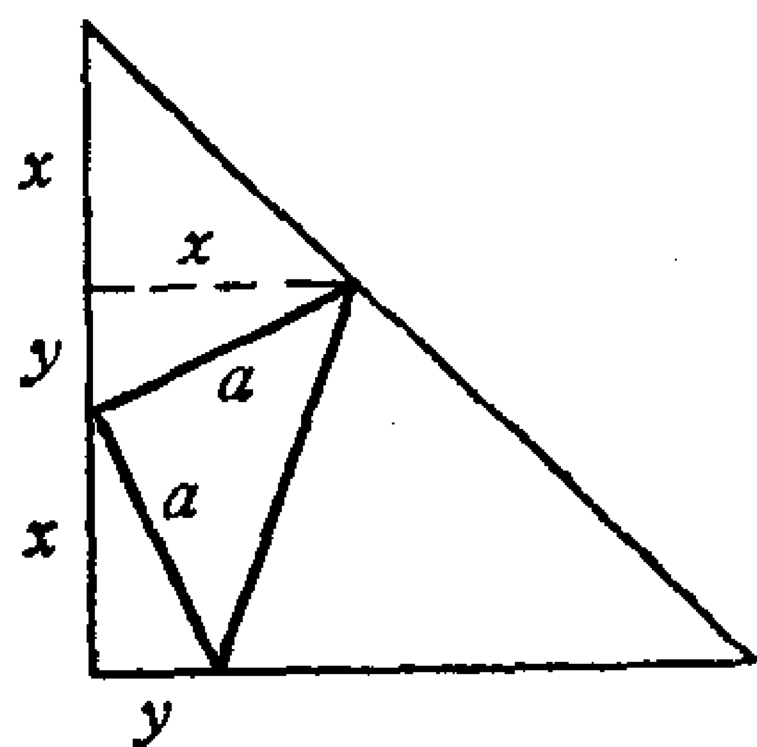


图111

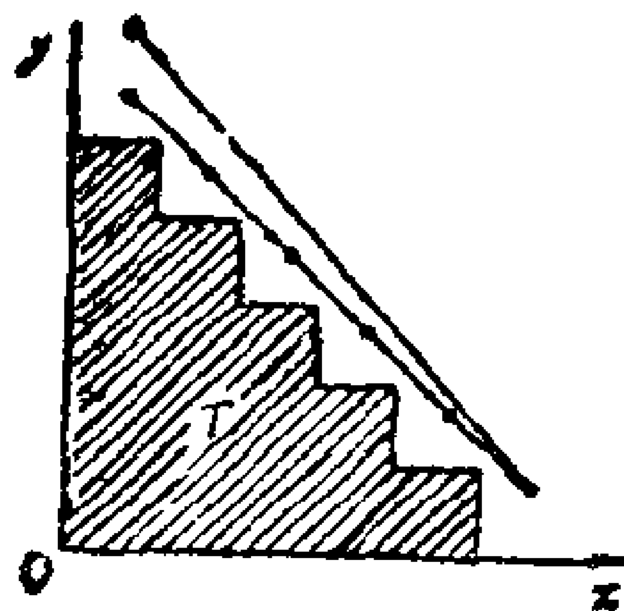


图112

注　如果此题中可允许有3只或更多的松鼠，则可以作成更有意思的图形。

271．首先把国会议员用任意方式分成两个院．如果在某一个院中的议员A的对手至少两个，那么在另一院中A的对手不多于1个．再把A重分到另一个院中去，同时在两个院中成双的对手的总数S都在减少．因为S是自然数，而A的对手的减少只能进行有限次，最后一定能得到所要求的分法．

272．容易得到所有二进位制的有理数：分母是2、4、8、16、…等的分数．

为了从(0，1)得到分数$1/n$，只要选取其和为1的、n个不同的二进位制有理数并取它们的算术平均值即可．例如，当$n=5$时

$$\frac{1}{5}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^4}}{5}$$

（对于任意n也有类似的形式）．

现在我们指出，如果我们能够根据某个方案从（0，1）得到t，那么根据同一方案可由(1，0)得到$1-t$（处处用$1-x$代替x，而求算术平均值的运算保持这个变换），根据同样的方案我们也能从（0，r）得到（0，rt）（用rx代替x）．于是，如果我们已经得到了$1/n$以及所有有理数$k/(n-1)$，$k=1$、2、3、…、$n-1$，那么就可以得到$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$，以及一切$\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{k}{n-1}$．

273. 我们研究数x_m/m的集合，这里$k^2\leqslant m\leqslant(k+1)^2-1$，($k=1$, 2, 3, …)，第$k$个集合由从$x_{k^2}/k^2$到$x_{(k+1)^2-1}/((k+1)^2-1)$的$(k+1)^2-k^2=2k+1$个数构成。在第$k$个集合中把每一个数都换成最大的数$x_{k^2}/k^2$，我们就得到这个集合中一切数之和不超过$\frac{(2k+1)x_{k^2}}{k^2}\leqslant\frac{3kx_{k^2}}{k^2}=\frac{3x_{k^2}}{k}$。

那么对于任意自然数n我们得到

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\leqslant 3\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\cdots+\frac{x_{q^2}}{q}\right)$$

其中$q^2>n$。

274. 任取一点O并把所取的每一个向量$\overrightarrow{AB}$表示为$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$的形式。在所有向量的和中每一个向量$\overrightarrow{OM}$前面出现"负号"和"正号"的次数一样多，因此和向量等于$\overrightarrow{O}$。这里M是已知点。

275. 答案：1）当$n=8$时16个棋子；2）当n是偶数时需要$2n$个棋子；当n是奇数时需要$2n+1$个棋子。

证明1. 图113-1及图113-2清楚地表示了那些棋子的摆法。当n是偶数时，证明较少的棋子不够用比较简单。这是因为在平行于一条对角线的每条直线上应该各有一个棋子，而在对角线上是两个棋子（在角上）。

证明2. 在图中的每条虚线上应该各有一个棋子。这个证明也适用于n是奇数的情形（图113-2）：除$2n-2$条虚线外（在每一条虚线上都有一个棋子），应该还要考察连结A、B、C、D 4个格子中心的6条直线；在这些直线上需要至少放3个棋子。

276. 答案：$x=\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$，$y=\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$。

把所给方程相加并且相减，再把所得结果乘起来就得到

$x^2-y^2=a^2-b^2$，即$\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{a^2-b^2}$，

把它再代入原方程组并解所得到的方程组就能得到答案。如果在

解中用x替换a，$-y$替换b，则得到的表达式与原表达式相同，这

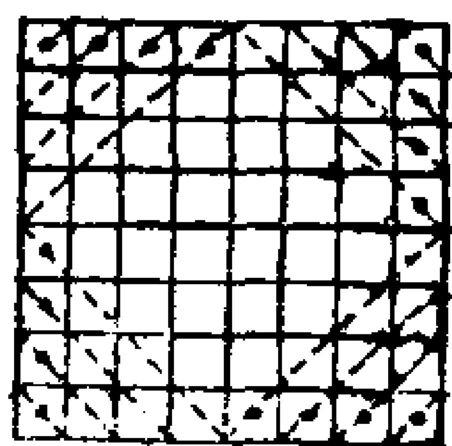


图113—1

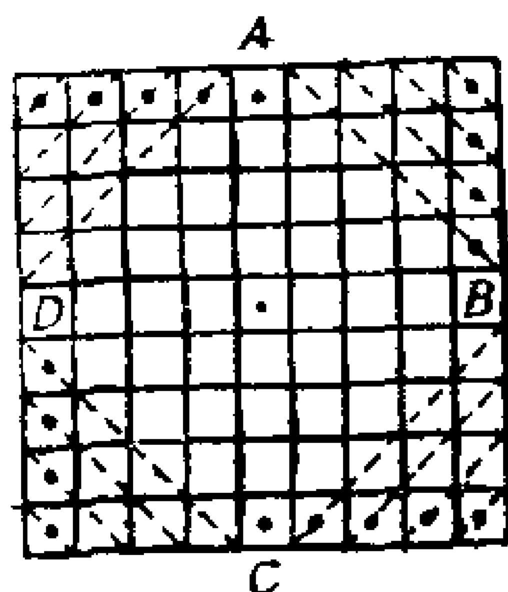


图113—2

说明不需要进行检验：只要再把答案表达式中的x换成a，y换成$-b$就得到了原方程组.

注　我们指出，如果用方程组

$$\frac{x-yf(x^2-y^2)}{\sqrt{1-f^2(x^2-y^2)}}=a,\quad \frac{y-xf(x^2-y^2)}{\sqrt{1-f^2(x^2-y^2)}}=b,$$

代替原方程组，这里f是绝对值不超过1的函数，则原方程组的一切性质都将保留. 这个问题的实质在于"洛伦茨"变换

$$(x,\ y)\to(x',\ y')\colon\ x'=\frac{x-vy}{\sqrt{1-v^2}},\quad y'=\frac{y-xv}{\sqrt{1-v^2}}$$

具有性质：$x^2-y^2=(x')^2-(y')^2$.

洛伦茨变换在爱因斯坦相对论中起着主要的作用.

277. 如果用每边长几乎等于$1/2^k$（$k=1,\ 2,\ \cdots$）的一组小正方形来覆盖正方形，那么这些小正方形可以不重叠地摆放（图114）. 因为小正方形的面积每次缩小到1/4以下，那么它们面积的和大于1，所以它们能够复盖整个正方形.

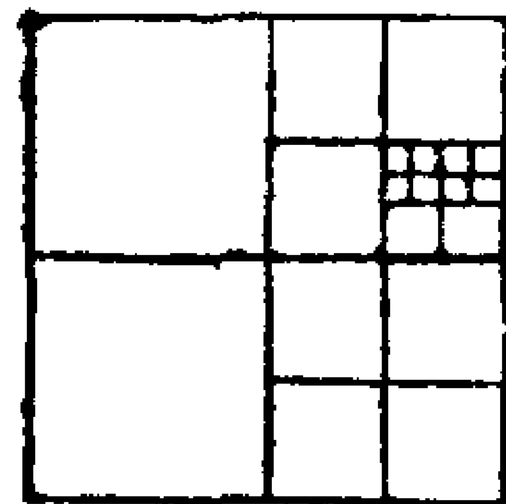


图114

278. 设$s=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

因为$x_i\geqslant x_i^2$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 那么所需要的不等式可由下列不等式得出：$(s+1)^2\geqslant 4s$，显然它等价于$(s-1)^2\geqslant 0$.

279. 因为p、q互质，那么它们之中的每一个数都与$n=p+q$互质. 因此$\frac{i}{p}$，$\frac{j}{q}$，$\frac{i+j}{n}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$；$j=1,\ 2,\ \cdots,$

$q-1$）都不相同。注意到$\frac{i+j}{p+q}$总在$\frac{i}{p}$和$\frac{j}{q}$之间。因此，显然所有分数$\frac{i}{p}$、$\frac{j}{q}$都在不同的区间$[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$中，$k=1, 2, \cdots, n-2$。

280．设e_i是直线l_i上的单位向量，且设$e_ie_{i+1}=c_i(i=1, 2, \cdots, 1978)$，$e_{1979}e_1=c_{1979}$（$c_i$是$e_i$与$e_{i+1}$的夹角余弦值）．记$\overrightarrow{OA_i}=a_ie_i$。直线$A_{i-1}A_i$与$l_i$垂直等价于

$$(a_{i-1}e_{i-1}-a_{i+1}e_{i+1})e_i=0,\ a_{i-1}c_{i-1}=a_{i+1}c_i. \quad (*)$$

在取定a_1后，我们可以选取a_3、a_5、…、a_{1979}、a_2、a_4、…、a_{1978}，使所有1979个条件（$*$）都成立，但除去一个例外：$a_{1978}c_{1978}=a_1c_{1979}$。我们把1978个等式

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{c_1}{c_2}、\frac{a_5}{a_3}=\frac{c_3}{c_4}、\cdots、\frac{a_{1979}}{a_{1977}}=\frac{c_{1977}}{c_{1978}}、$$

$$\frac{a_2}{a_{1979}}=\frac{c_{1979}}{c_1}、\frac{a_4}{a_2}=\frac{c_2}{c_3}、\cdots、\frac{a_{1978}}{a_{1976}}=\frac{c_{1976}}{c_{1977}}$$

连乘并约分后得到第1979个等式．

281．记$p_k=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{n-k}a_n$。可以这样来计算它：在由0、1组成的数列$A_n=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$下面再写出$A_n$并错开$k$位，这里$p_k=p_k(A_n)$是上、下两个数都为1的那些数位的个数。

如果当$0\leqslant k\leqslant n-1$时，所有$p_k(A_n)$都是奇数，则$A_n$满足此题要求。

下面用A_m、A_n来构造一个新数列$A_l=A_n\amalg A_m$，它的长度$l=(2m-1)n-(m-1)=2mn-m-n+1$。我们用$2m-1$个数字组成的块$A_m\underbrace{0\cdots0}_{m-1}$来代替$A_n$中的每一个1，用$2m-1$个零组成的块代替$A_n$中的每一个零，并把最后的$m-1$个零去掉。

在用上面所指出的方法计算关于A_l的p_k时，如果上下两行错

开k位，那么上一行中每一个块A_m仅接触到下一行中的一个块A_m；如果$k=(2m-1)q+r$，或者$k=(2m-1)q-r$，$0\leqslant r\leqslant m-1$，$0\leqslant q\leqslant n-1$，那么$p_k(A_l)=p_q(A_n)\cdot p_r(A_m)$，因为正好有$p_q(A_n)$对块$A_m$相接触同时它们错开$r$位。由此得到数列$A_l=A_n \amalg A_m$与$A_n$、$A_m$一起是所求的数列。

1）的答案：$A_{25}=A_4 \amalg A_4$，其中$A_4=|10|$；

$A_{25}=1101000110100000000001101$

此外，$A_{25} \amalg A_{25}$有$2\cdot 25^2-50+1=1201$个数字，这就是2）中所求的数列。

282. 假设四边形$ABCD$相交于点O的对角线不互相垂直，例如角AOB是锐角。作A、B两点关于点O的对称点A'、B'。三角形$A'OB$和三角形$B'OC$的内切圆的半径小于三角形AOB的内切圆半径r（所有这些三角形的面积都相等，而三角形AOB的周长较小），因此从点A、B向角BOC和角AOD的内切圆所作的切线分别与射线OA'、OB'相交于C、D两点。C、D到O的距离分别大于A'、B'到O的距离，所以线段CD不能与三角形$OA'B'$的半径为r的内切圆相切。

于是直线AC垂直于直线BD，并注意到所有4个内切圆的半径都相等，因而它们是四边形$ABCD$的对称轴。因此这个四边形是菱形。

283. 1）我们考察红点对(A_l, A_r)的一切可能的摆法T。A_l、A_r把线段A_0A_n分成3个部分：A_0A_l、A_lA_r、A_rA_n；用M表示其中最长的那一部分，m表示最短的那一部分。从所有可能的摆法T中选取使M为最小的那些摆法，再从这些摆法中选取使m为最大的一个摆法。我们要证明，对于这样的摆法$T=(A_l, A_r)$将满足条件$M-m\leqslant 1$。

假设对于它有$M-m>1$。如果它的M和m两部分相邻，那么

把它们之间的红边界移动一条线段后我们就得到了摆法T'，它的最小部分大于m并且(或者可能)最大的部分小于M，这与T的取法矛盾。如果$m=A_0A_l$，$M=A_rA_n$，那么，或者摆法（A_{l+1}，A_r）的最小部分大于m，或者$A_{l+1}A_r\leqslant m<M-1$，则有摆法（$A_{l+1}$，$A_{r+1}$）的最大部分小于$M$：二者都与$T=$（$A_l$，$A_r$）的取法矛盾（图115）。

2）我们考察这样的摆法，它的k个部分$\triangle_1$、$\triangle_2$、…、$\triangle_k$中最长部分等于M，而最短部分等于$m<M-1$。设$\triangle_i=m$在$\triangle_j=M$的左边。把$\triangle_i$的右端点向右移过1条或若干条线段，使$\triangle_i$



图115

不小于$M-1$（但不大于M），如果现在$\triangle_{i+1}<M-1$，那么对它进行同样的移动，然后再转向$\triangle_{i+2}$，等等，直到所有部分$\triangle_i$、$\triangle_{i+1}$…、$\triangle_{j-1}$的长度都大于或等于$M-1$为止，或者直到我们不能再把$\triangle_j=M$减少1条线段为止。如果在所得到的摆法中仍然有$M-m>1$，再进行同样的步骤若干次。在这里我们所得到的摆法不可能重复，因为得到的新摆法在下列意义下要好些，或者它的最长部分M的长度确实要小些；或者M相同，但等于M的部分要少些；或者等于M的部分的数量相同，但那时m较大或者（当m相同时）等于m的部分较少。因为所有摆法有限，经过若干步之后我们得到了最好的摆法，对于它有$M-m\leqslant 1$。

284. 答案：能整除。显然所给数能被20整除，可以由$100=99+1$以及$19+20+\cdots+80=99\cdot 31$得出能被99整除。

285. 如果s_1、s_2分别为左边具有偶数号码与具有奇数号码的面积之和，而s_3、s_4分别为右边具有偶数号码与具有奇数号码的面积之和，则$s_2+s_4=s_3+s_1=s_3+s_4=s_1+s_2$。

286。只要证明在任何时刻可以把重量不大于0.5吨的集装箱送入轨道即可。

第十四届

287。$S_{ABCD}=2S_{AMPC}$。设$AM=x$，那么

$$S_{AMCD}<2S_{AMP}\leqslant x(a-x)\leqslant a^2/4.$$

288。答案：没有。$y^3=(z^2-x)(z^2+x)$，而且y是质数。我们得到：或者$z^2-x=1$，$z^2+x=y^3$，或者$z^2-x=y$，$z^2+x=y^2$。这两个方程组都没有质数解。

289。设O为所给圆周的圆心，R为它的半径且$OE=a$。如果$a\geqslant R/\sqrt{2}$，那么所求之弦BD所对的弧等于90°，因而与半径为$R/\sqrt{2}$、圆心为O的圆周相切。如果$a<R/\sqrt{2}$，所求之弦垂直于直径AC。注意到$S_{ABCD}=\frac{2R}{a}S_{BOD}$，而$S_{BOD}=1/2R^2\sin\varphi$，$\varphi=\angle BOD$，因而最大值与点$E$的位置有关。

290。设A、B、C为湖边上3个依次而排的居民点。由已知条件知：当且仅当B与C不通航时，A与B可通航。于是把所有居民点分成若干组，每组由相互之间可通航的两个居民点组成。同时任何两组也可通航，即第一组中一个居民点与第二组中的某个居民点相通航。

291。与数$N=\overline{abcdef}$一起，数$\overline{abc}+\overline{def}$、$\overline{bcafde}$、$\overline{cabdef}$都能被37整除。

292。答案：$(\pi k, \pi l, \pi m)$，k、l、$m\in Z$。把前两个方程相加之后再减去第3个方程，我们得到$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+z}{2}\cdot\cos\frac{y+z}{2}=0$。

293．如果$\vec{S}\neq0$是所有向量之和，那么对于这组向量中的任意$\vec{a}\neq0$有$\vec{S}=k\vec{a}$，其中k是某个数．

294．1）答案：$1962+S(1962)=1980$．

2）如果数n的末位数字为9，则$S_{n+1}<S_n$；如果末位数字不是9，则$S_{n+1}=S_n+2$．对于任意自然数$m>2$，选取最大的N，使$S_N<m$．那么$S_{N+1}\geqslant m$，同时N的末位数字不是9．因此或者$S_{N+1}=m$，或者$S_{N+1}=m+1$．这里$S_n=S(n)+n$．

295．答案：33．每一个3×1的矩形正好含有1个红格子．

296．1）例如，如果在第1天三个朋友A、B、C的身体状况分别为：A在接种后有免疫力，B有病，而C健康，这时流行病就不会停止．

2）如果流行病不停止，那么存在一个小矮人A，他第一个再次患病，然而那时传染他的小矮人B这次应该在A之前再次患病．

297．答案：不可能．从某一下标开始的数列n_k是稳定的，即$n_p=n_{p+1}=\cdots$．

298．答案：$\angle DEC=90^\circ$，$\angle EDC=60^\circ$，$\angle DCE=30^\circ$．当绕着点O按所需方向转动60°、并作系数为$1/2$、中心在D的位似变换后，点P变为线段MP的中点H、B变为线段BP的中点K，直线BP变为直线KH，它与AP交于点E．

299．数α和β是二次三项式$f(t)=(t-\alpha)(t-\beta)=t^2-\frac{1}{6}tp+\frac{1}{6}S$的根．同时$x<\frac{\alpha+\beta}{2}<z$，$f(x)>0$且$f(z)>0$．

300．答案：$\{1, 2, 3, 8, 10, 20, 25, 50, 100\}$．

设$k_1=1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n=100$为已知数．因为$2k_i\geqslant k_{i+1}$，那么对于任意$i$有$k_i\leqslant2^{i-1}$．特别，$2^{n-1}\geqslant100$，由已知$n\geqslant8$．由假设$n=8$得出$k_7=50$，而$2k_6=25$．矛盾．

301．每两个自然数(x, y)（$1\leqslant x\leqslant n$，$1\leqslant y\leqslant n$）都是方程

$[x^{3/2}]+[y^{3/2}]=c(1\leqslant c\leqslant 2[n^{3/2}])$的解．如果对于任意的$c$，解的个数不大于$M$，那么$2[n^{3/2}]M\geqslant n^2$或者$M\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{n}$．

302．引$BE\parallel CA$，$AE\parallel BC$．点A、C、B、E以及D在以O为球心、以AB为直径的球面上，CE也是这个球面的直径，$\angle CDE=90°$，而$\cos\angle DCE=\frac{|CN|}{|AB|}$，只要把正弦定理应用到三角形$DBE$和三角形$DCE$上证明$\sin\angle DBE>\sin\angle DCE$即可．

303．1）当$k>m$时，所有x_k在小数点后面的前m个数字都相同．

2）答案：能．

在循环小数$x=0.\dot{1}\dot{0}$小数点后面号码为$k(10^n<k<10^n+5)$的数字上用1100代替1010．

C）答案：$x=0\cdot x_1x_2\cdots x_k$，其中当$10^n<k\leqslant 10^n+5$时$x_k=1$，而其余的$x_k=0$．

第十五届

304．答案：$32(\sqrt{2}-1)$．

需要利用以下事实：在一个棋盘转动90°后黑格子变成白格子，而白格子变成黑格子．而在转动两个棋盘时两个棋盘上的黑格子都由白格子所取代．因此所求面积是由两个棋盘的交集所构成的八边形面积的四分之一．

305．只需要证明$\angle B_1MA=\angle AA_1B_1=\angle A_1B_1B$．

306．1）$k=3$；$720=2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=8\cdot9\cdot10$．

2）如果$m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$，那么$m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2$，这是不可能的．

307. 如果在表格的某一列中从上面数起的前3个数是a、m和n，那么1、2、…、$m-1$、m中的每一个数在第二行中数m的左边至少出现n次，而大于m的任何数出现的次数小于n.

308. 答案：当$a\leqslant 0$时，$S=(1-a)\sqrt{1-a}$；当$0<a<1/2$时，$S=1-2a$；当$a\geqslant 1/2$时，$S=0$.

309. 绕着顶点C转动60度后三角形CAD变为三角形CBE，而当绕着点H转动60度后三角形HBE变为三角形HDK.

310. 如果居民X与A_1认识、A_1与A_2认识、…、A_k与Y认识，我们就说这些居民X、A_1、A_2、…、A_k、Y构成一条链. 由已知条件得出，任何两个居民由某条链所连接. 我们认为不存在闭链（即在其中X与Y认识的链）. 取最长的一条链$X—A_1—$$—A_2—\cdots—A_{10}—\cdots—A_k—Y$. 如果$k\leqslant 19$，那么，如果将一新闻告知$A_{10}$，10天后它就会为全村居民所知. 如果$k\geqslant 20$，那么分出居民$X$、$A_1$、…、$A_{10}$以及与他们未经过$A_{11}$发生联系的所有人（共不少于11个人）. 剩下的居民仍然满足此题要求，因此重复上述步骤89次（每一步中都要注意自己的A_{10}），或者在某一步中我们能使所有居民都知道某条新闻，或者剩下至多$1000-89\cdot 11=21$个人，从这21个人中再挑选1个人. 如果在村子中有闭链，那么可以把这条闭链弄断，同时保持满足此题的条件.

311. 我们有$f(n\pi)=(-1)^n a+(-1)^n b$；$f(\pi/3)=a/2-b$；$(2\pi/3)=-a/2+b$. 因此$|a+b|\leqslant 1$，$|a-2b|\leqslant 2$.

312. 设L'、N'分别是平行四边形$ABCD$的边BC和AC的中点. 平行四边形$KL'MN'$或者与$KLMN$重合、或者不重合. 在第二种情形中四边形$ABCD$是梯形（$BC\parallel AD$）.

313. 答案：$x_n=1$，$n\in N$；而当$n\in Z$时$x_n=n$.

314. 如果在$m\times n$的表格的某一行中白格占大多数，则称这一行是白的；在相反的情形中则称这行是黑的. 设p、q分别是白行和黑行的数量，r、s分别是白列和黑列的数量（$p+q=m$,

$r+s=n$),可以认为$p\leqslant q$. 设在每一行(或列)中不到1/4的格子是其它颜色. 那么$ps+qr$不大于在所有行和列中"其它"颜色格子的总数,即小于$mn/4+mn/4=mn/2$, 因此$r\leqslant s$. 而白格的总数小于

$$pr+\frac{qn}{4}+\frac{sm}{4}=\frac{mn}{2}+pr-\frac{np}{4}-\frac{mr}{4}$$

$$=\frac{mn}{2}-\frac{p}{2}\left(\frac{n}{2}-r\right)-\frac{r}{2}\left(\frac{m}{2}-p\right)\leqslant\frac{mn}{2}.$$

315. 由已知条件得出$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{BT}$.

316. 答案: $x=5$, $y=6$. 如果$x=d+y$, $d\geqslant 1$, 则$(3d-1)y^2+(3d^2-d)y+d^2=61$. 由此$d\leqslant 3$.

317. 对于任何一个队存在9个没有与它比赛过的队,而在这9个队中存在两个没有彼此交过锋的队.

318. 设A_2、B_2、C_2分别是BC、CA、AB边上的点,它们满足$AC_2/C_2B=BA_1/A_1C=CB_2/B_2A=3$. 六边形$A_1A_2B_1B_2C_1C_2$的周长等于$3/4P$且大于三角形$A_1B_1C_1$的周长. 还应该写出关于三角形$A_2C_1B_1$、$C_1B_2A_1$、$A_1B_1C_2$的三角不等式.

319. 应该利用不等式$x>y>0$以及$0<x^3-y^3<x^3+y^3$.

320. 设A和B为所作折线的两个端点.作折线对直线AB的射影,折线的每一条边的相对误差等于p,因此所有边的绝对误差之和不大于$4p$. 因此$d\leqslant 4p$.

321. 1)不可能(所放的一切数之和仍然是奇数).

2)可以.

3)不可能.

为了证明1)和2)的结论我们来考察两个四面体,这两个四面体由立方体的那些顶点所构成;其中的任意两个不属于同一条棱. 所作的运算使在每个四面体顶点之上的数的和增加1.

322. 答案:例如9440. 设$m=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot k$,选取$k$使$m-1$能被11整除,而$m+1$能被13整除,我们得到$n=m-10$满足此题

要求。

323．答案：在最后的一摞中卡片将是按照不减的次序摆着。

324．任意6个已知点中至少有两个在图116所示的1个图形中。

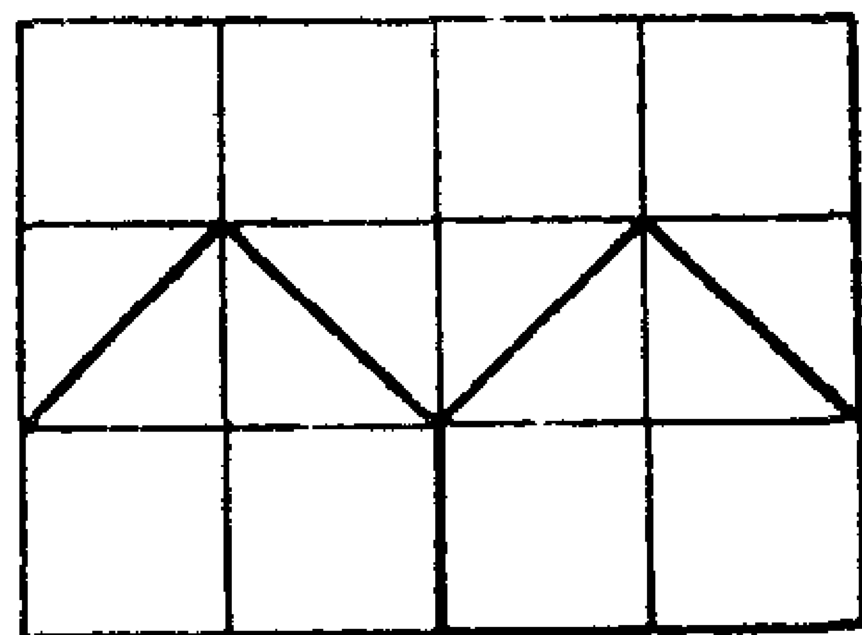


图116

325．1）答案：当$x=y=1$时可能的最小值等于3．由算术平均值的不等式可得到$1+x^2y^4+x^4y^2\geqslant 3x^2y^2$．

2）设$p(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)+\cdots+g_n^2(x,y)$，其中$g_i(x,y)$是多项式，$i=1,2,\cdots,n$．因为$p(x,0)=p(0,y)=4$，多项式$g_i(x,y)$不可能含有形为$ax^k$和$by^l$的单项式，因此$x^2y^2$的系数应该为正．

326．答案：一个点，即三角形ABC的中心O．

第十六届

327．答案：r_1r_2．

328．答案：3个数．用归纳法可以证明当$n\geqslant 4$时$a_{n-1}<b_n<a_n$．

329．1）从能被2^m-1整除的、形为$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}$的数中选取有最小$n$的那些数，再从所得的数中选取使$k_1+k_2+\cdots+k_n$为最小的一个数．$k_1$、$k_2$、$\cdots$、$k_n$中所有数都不相同．如果$n<m$，则$k_i\leqslant m-1$，以及$2^{k1}+2^{k2}+\cdots+2^{kn}<2^m-1$．矛盾．

2）不存在．设$p=a_1 10^r+\cdots+a_r$是能被$M=\underbrace{11\cdots1}_{m个}$整除的、且所有数字和小于$m$的最小的数．那么$r\geqslant m$，因而能被$M$整除的$p_1=p-(10^r-10^{r-m})$小于$p$，并且它的数字和不超过$p$的数字和．

330。在8个数之中存在3个不超过1/6的数，同时其中的两个数在同一侧面的对角线的端点上。这个侧面应该给第一个人。

331。答案：在星期六。

332。答案：$MA/MB=k^2$。设O为平行四边形的中心。三角形AOM与三角形MOB相似。

333。假设结论不成立。把所有弧的端点涂成黑色。再把整个圆周分成长度等于1的若干条弧并把新的分点涂成红色。现在任取一条长度为2的弧AC，它的两个端点是黑色，中点B'是红色，与点B'关于圆心对称的点B是黑色。设在长度为$3k-1$的弧AB上有n_1条长度为1的弧、n_2条长度为2的弧及n_3条长度为3的弧。在弧BC上将有n_1条长度为3的弧（与长度为1的弧的端点关于圆心对称的点是红色！）。因此$n_3=k-n_1$，这与$3k-1=n_1+2n_2+3n_3$矛盾。

334。设AM、BM、CM和DM都是长度为1的线段，它们都在连结点M和四面体顶点的射线上。直线DM与三角形ABC相交于某一个点P，如果$\angle AMD$、$\angle BMD$和$\angle CMD$的余弦值大于$-1/3$，那么这些角小于$\varphi=\arccos(-1/3)$，而$\angle AMB$、$\angle BMD$和$\angle CMP$大于$\pi-\varphi$。可以认为$\angle APB\geqslant 120°$。那么把余弦定理应用到三角形APB和三角形AMB后得到$\cos\angle AMB<-1/3$。

335。答案：$b<a<c$。

336。设O是使$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2n+1}}=\vec{0}$的点。选取$k$使$2^k-1$能被$2n+1$整除，那么折线$M_k$将关于$O$同位相似于$M$，且相似系数等于$2^{-k}$。

337。答案：100。应当考察前99个数中的最大的数a以及后1882个数中最小的数b，并证明$a<100<b$。

338。答案：小精灵正确。岛对河岸射影的总长度小于4米，因此从码头到岛屿之间最近的出口小于2米。

339。依次引：1）两条平行线，其中每一条都与抛物线相

交于两个点；2）经过所得各线段中点的一条直线；3）这条直线的垂线，它与抛物线相交于A、B两点；4）线段AB的中垂线，这就是轴oy。轴ox过oy与抛物线的交点并与oy垂直。长度单位是直线$y=x$与抛物线交点的横坐标。

340. 2）设m_k和M_k分别是第k列中最小的数和最大的数，那么对这列中的任意数x有$m_k\leqslant x\leqslant M_k$。因此或者存在$x$，对于一切$k=1, 2, \cdots, n$有$m_k\leqslant x\leqslant M_k$；或者存在$k$和$p$满足$M_k\geqslant m_k>M_p\geqslant m_p$，但那时在每一行中都有数$y$，它满足$M_p\leqslant y\leqslant m_k$。

341. $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot 2^{\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}}{2}}\geqslant 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

342. 答案：43个数：2、3、…、44。如果划去的数少于43个，那么至少有一个3数组（k，$89-k$，$k(89-k)$）由未被划去的数组成，其中$2\leqslant k\leqslant 43$。

343. 在图117所示图形的格子中的最小数满足条件。

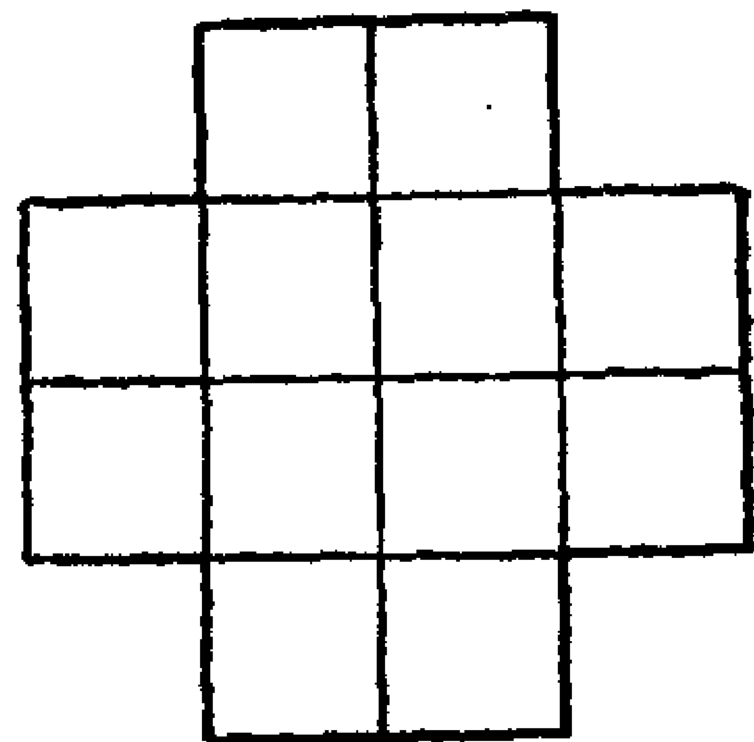


图117

344. 可以认为$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0$。设集合$M_{ik}$（$i$，$k=0, 1, i\neq k$）由那些使$l\equiv i(mod 3)$的数$a_l$以及使$m\equiv k(mod 3)$的正数$a_m$组成。集合$M_{ik}$中的一个集合满足此题的要求。

345. 把不包含任何标出格子的列与最右边的一列对换，再把所得表格的最后一行与包含标出格子的任意一行对换。这时此题就归结为（$n-1$）×（$n-1$）的表格。

346. 用a_0、a_1、…、a_n分别表示0、1、…、n中的一个数，它们满足$|a|\leqslant|a-a_0|\leqslant|a-a_1|\leqslant\cdots\leqslant|a-a_n|$。对于满足$1\leqslant k\leqslant n$的一切$k$，不等式$|a-a_k|\geqslant\frac{k}{2}$都成立。把这些不等式连乘起来就得到

$|a|\cdot|a-1|\cdots|a-n|$

$$=|a-a_0|\ |a-a_1|\cdots|a-a_n|\geqslant\langle a\rangle\frac{n!}{2^n}.$$

347. 1）不存在．当$x=1$、$y=2$、$z=1$时等式的左边等于0.

2）存在．设$u=x-y+1$，$v=y-z-1$，$w=z-x+1$．在等式$(u+v+w)^7=1$中去括号、合并同类项后得到$u^3P+v^3Q+w^3R=1$.

348. 设四面体$KLMN$的界面KLM有最大的周长．设A_1、B_1、C_1、D_1分别是点A、B、C、D对平面KLM的投影，且设Γ是四面体$KLMN$对平面KLM投影的限定折线．假定P_{RSTQ}表示连结R、S、T和Q的6条线段长度之和，那么

1）$P_{KLMN}\leqslant 2P_{KLM}$，2）$P_{KLM}\leqslant P_\Gamma$，3）$P_\Gamma\leqslant\frac{2}{3}P_{A_1B_1C_1D_1}$，

4）$P_{A_1B_1C_1D_1}\leqslant P_{ABCD}$.

第十七届

349. 2）任意两条折线不应该有公共线段，因此在正方形边界上的且异于其顶点的12个结点应该都是折线的端点，而5条折线共10个端点.

350. 答案：1）不可能；2）可能.

这里“倒过来”进行推理比较好：（17，1967，1983）只能由（5，3，3）得到，而（5，3，3）是由（3，3，3）得到而不是由（2，2，2）得到的.

351. 设O为三角形XYZ内部的一点．把它与已知的圆心O_1、O_2、O_3以及点X、Y、Z连结起来，在所构成的6个锐角中有一个（例如角O_1XA）不小于60°．那么$AO<OX/\sin 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}OX$.

352．设$n^2<a<b<c<d<(n+1)^2$，且$ad=bc$．那么$(a+d)^2-(d-a)^2<(b+c)^2$，以及$a+d>b+c$．由此得到$(d-a)^2>(a+d+b+c)(a+d-b-c)>4n^2$，但是$d-a<2n$．矛盾．

353．答案：$(0,0)$；$(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$；$(2-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$．从第一个方程中减去第二个方程后得到$f(x)=f(y)$，其中函数$f(x)=x^3-2x^2+2x$是增函数（$f'(x)>0$）．

354．如果$k\geqslant a\underbrace{44\cdots4}_{n-2}5$（$a\geqslant1$是首位数字），

那么$\bar{k}=(a+1)10^{n-1}$，所以$\bar{k}/k\leqslant\dfrac{(a+1)10^{n-1}}{a\underbrace{44\cdots4}_{n-2}5}<\dfrac{a+1}{a+4/9}\leqslant18/13$．

如果$k\leqslant a\underbrace{44\cdots4}_{n-1}$，则$\bar{k}=a10^{n-1}$，所以$\bar{k}/k\leqslant1$．

355．$S_{DEF}=\frac{1}{2}(S_{BEF}+S_{AEF})<\frac{1}{2}(S_{BEF}+S_{ADF})$

$$=\frac{1}{2}S_{ABFE}=\frac{1}{2}(S_{ABF}+S_{AFE})\leqslant\frac{1}{2}(S_{ABF}+S_{ABE})$$

$$=S_{BDF}+S_{ADE}.$$

356．答案：1）不是；2）不是．

1）把$\sqrt{10}$表示成十进制的小数，α_{2k+1}的末位数字等于这个小数的小数点之后的第k个数字．

2）如果β_n是偶数，设$\gamma_n=0$；如果β_n是奇数，则设$\gamma_n=1$．把$\sqrt{2}$表示成二进制的小数，γ_{2^n+1}等于它的小数点之后的第n个数字，所以γ_{2^n+1}不是循环数列．

357．由已知条件得出$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta)$．如果$\sin\alpha>\cos\beta$，且$\cos\alpha>\sin\beta$，那么$\sin^2\beta+\cos^2\beta<1$，矛盾．同样也不可能有$\sin\alpha<\cos\beta$，$\cos\alpha<\sin\beta$．因此

$\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$。

358．设α和β是已知平面，l是它们的交线．只要把平面α绕着直线l转动到与平面β重合即可（点A_1、B_1、C_1、D_1与平面α一起转动）．

359．答案：5．如果方程$f_n(x)=x^2+p_nx+q_n=0$不是最后一个方程．那么，如果$n\geqslant3$，p_n、$q_n\geqslant0$，则有$p_n^2>4q_n$，$q_n>p_n$，$p_nq_n>-(p_n+q_n)$．如果方程$f_5(x)=0$不是最后一个方程，那么，或者$p_4<0<q_4$，或者$0<p_4<q_4$同时$p_3<0<q_3$，这两种情形都不可能．例如当$n=5$时：

$$f_5(x)=x^2-\frac{1}{2}x+4,\ f_4(x)=x^2-\frac{7}{2}x-2,\ f_3(x)=x^2+\frac{11}{2}x+7,$$

$$f_2(x)=x^2-\frac{25}{2}x+\frac{77}{2},\ f_1(x)=x^2-26x-\frac{1925}{4}.$$

360．如果a^n能被b^n整除，那么a能被b整除．

361．答案：不能．七个字母的单词共有128个，由已知条件，其中$3\cdot8+10\cdot4+30\cdot2=124$个词不可能在词典中出现，因此在这本词典中只有4个单词由7个字母组成．

362．答案：1）可以．2）可以．

1）取两张无穷大的方格纸．在第一张的彼此相距5个格子的斜线的方格里摆上1，而在其余的格子里摆上0．在第二张的彼此相距3个格子的斜线的方格里摆上1，其余的格子里摆上0．然后把在两张纸上彼此对应的格子中的数相加．

2）在同样的斜线上的方格中交替地摆上0和1，再把两张纸上彼此对应的格子中的数相减．

363．答案：$\sqrt{5}+1$．

364．如果a是孩子对的总数目，m是由男孩子组成的对的数目，那么$2a=8m$．

365．答案：$3+2\sqrt{2}$．如果S_1、S_2、S_3、S_4分别是按顺时

针方向编号的矩形的面积，那么$S_1S_3=S_2S_4\geqslant 2$，而$S_1+S_2+S_3+S_4\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

366. 设e_1、e_2、e_3分别为向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$上的单位向量，$\angle BOC=\alpha$，$\angle COA=\beta$，$\angle AOB=\gamma$. 只要证明$e_1\sin\alpha+e_2\sin\beta+e_3\sin\gamma=0$即可. 为此应该考察三角形$PQR$，它的边分别平行于$OA$、$OB$和$OC$，并利用等式$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QP}=0$.

367. 对m作归纳法：当$m=1$时结论成立. 设对于$m=k-1$ $(k\geqslant 2)$结论成立. 我们来考察$2k+1$个绝对值不超过$2k-1$的数组成的集合A. 如果在其中存在$2k-1$个绝对值不超过$2k-3$的数，那么一切就都清楚了. 在相反的情形中可以认为，在A中或者有$2k-1$、$2k-2$和$-2k+1$，或者有$2k-1$、$2k-2$和$-2k-2$. 在第一种情形应该考察数对$(1, 2k-2)$、$(2, 2k-3)$、…、$(k-1, k)$以及$(0, -2k+1)$、$(-1, 2k-2)$、…、$(-k+1, -k)$. 至少有一对数由A中的数组成. 在第二种情形类似地考察数对$(1, 2k-3)$、…、$(k-2, k)$和$(0, -2k+1)$、$(-1, -2k)$、…、$(-k+1, -k)$.

368. 答案：等式只可能对有对应垂直边的等边三角形ABC和DEF成立. 由$d_0<\frac{2}{\sqrt{3}}min\{d_1, d_2, d_3\}$得到三角形$ABC$的每个角都不超过$60^\circ$.

369. 如果在直线上给定长度分别为α和β、且不相交的线段$\triangle_1$和$\triangle_2$，那么端点属于$\triangle_1$和$\triangle_2$的线段长度的集合填满了某条长度为$\alpha+\beta$的线段. 因此，如果δ_1、δ_2、…、δ_k为已知线段的长度，那么$\delta_1+(\delta_1+\delta_2)+(\delta_1+\delta_3)+\cdots+(\delta_1+\delta_k)+\delta_2+(\delta_2+\delta_3)+\cdots+(\delta_2+\delta_k)+\cdots+(\delta_{k-1}+\delta_k)+\delta_k=k(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k)\geqslant 1$.

370. 显然$v_1=10$且$v_n\leqslant v_{n+1}$. 如果对于任意n有$v_n=v_{n+1}$，那么这个小数是循环小数. 如果对于一切n有$v_{n+1}>v_n$，则$v_n\geqslant$

$v_{n-1}+1\geqslant v_{n-2}+2\geqslant\cdots\geqslant v_1+n-1=n+9>n+8$。

第十八届

371. 1）如果n不能被4整除，那么因数中只有一个偶数，因此它们的和不等于0。

2）答案：当$n=4k$时，如果k为偶数，那么$n=2\cdot(-2k)\cdot 1^{3k-2}\cdot(-1)^k$；如果$k$为奇数，那么$n=(-2)(-2k)\cdot 1^{3k}\cdot(-1)^{k-2}$。

372. $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$和$a+b+\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

373. 向量$\overrightarrow{AB}$由$\overrightarrow{AC}$旋转60°而得（$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B}$；$\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C}$）。

374. 答案：当m和n有相同的奇偶性时。

如果m和n为奇数，那么必须粘成$1\times n$的长条。而由m块这样的长条可得$m\times n$的矩形．当m和n为偶数时，先粘$(m-1)\times(n-1)$，$1\times(n-1)$，$(m-1)\times 1$和1×1的矩形。如果m和n有不同的奇偶性，那么由关于粘成矩形可能性的假定，必然得到小方块总数是奇数。

375. $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}\leqslant max(x,y)<x+y$。

376. 答案：不对。对手只要将正方体的任意三条两两异面的棱涂上绿色就行了，而这一点他总是可以做到的。

377. 设a_1，a_2，…，a_n是给定的数，且

$$s_n=\frac{a_n+a_2}{a_1}+\frac{a_1+a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}.$$

1）$s_n=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)\geqslant 2n$。

2）用数学归纳法证明不等式$s_n\leqslant 3n$。为此先考察$n=3$的情形，并注意a_1，a_2，…，a_n中最大者等于它相邻数的和。

378. 直线A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2是三角形$A_1B_1C_1$的三个内角的平分线。

379. 答案：$m=n=0$.如果$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$，那么$(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$，但这是不可能的。因为$0<5-3\sqrt{2}<1$，而$5\sqrt{2}-3>1$。

380. 如果第一行中的数是$a_1<a_2<\cdots<a_m<a_{m+1}<\cdots<a_n$，而第二行由数$a_{k_1}$，$a_{k_2}$，…，$a_{k_m}$，$a_{k_{m+1}}$，…，$a_{k_n}$组成，那么第三行的数是$a_1+a_{k_1}$，$a_2+a_{k_2}$，…，$a_m+a_{k_m}$。设$a_1\neq a_{k_1}$。那么对于某个$m\geqslant 2$，$a_1=a_{k_m}$。根据条件，$a_1+a_{k_1}<a_m+a_{k_m}$，$a_2+a_{k_2}<a_m+a_2$，…，$a_{m-1}+a_{k_{m-1}}<a_m+a_{k_m}$，所以$a_{k_1}<a_m$，$a_{k_2}<a_m$，…，$a_{k_{m-1}}<a_m$。此外$a_1<a_m$，$a_{k_1}<a_m$。我们找到了$m$个小于$a_m$的不同的数，矛盾。

381. 利用定理：如果AB为某圆的定弦，而弦A_1B_1的两端点在该圆上滑动，那么直线AA_1和BB_1的交点画出一个通过A、B的圆。

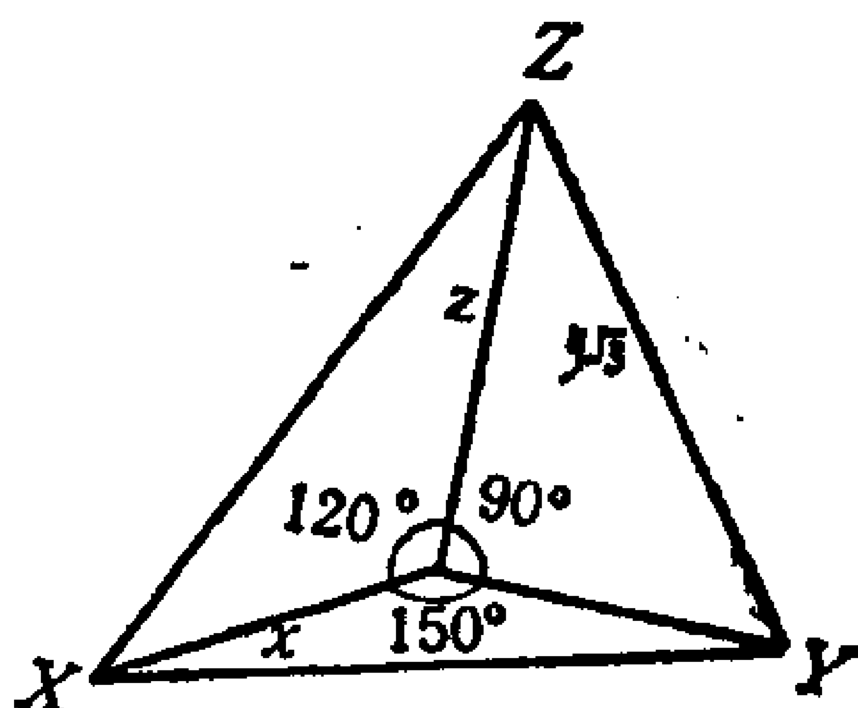


图118

382. 答案：$24\sqrt{3}$。利用三角形XYZ（图118）的面积表示D。

383. 答案：对。因为$f(-1)=11$，而$g(-1)=-9$。在某一时刻，所得的三项式的根是-1。

384. 答案：$\pi r^2+2pr-(pr^2/2R)$。

385. 设k为最重砝码的质量，而m为质量为1的砝码个数。那么$m>k$。在每一时刻在天平两秤盘上砝码质量之差不超过k.因此，在将所有质量大于1的砝码放完以后，再放质量为1的砝码天平就会平衡。

386. 只能有数字1，3，7，9出现在绝对质数中。对于任何M，数$M+1379$，$M+3179$，$M+9137$，$M+7913$，$M+1397$，

$M+3197$或$M+7139$都能被7整除。矛盾。

387. 答案：$x=9$，$y=0$；$x=4$，$y=2$。

388. 如果点M位于三角形PQR（$M\neq P$）内部或边上，那么$MQ+MR<PQ+PR$。原不等式只须对$AB=CD$的情况进行证明就可以了。

389. 答案：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$（当$n\geqslant 1$时，$|x_{n+7}|\leqslant\frac{1}{4}(\frac{5}{6})^n$）。

390. 考察1985×1986个格子的棋盘，它包含1983×1984个格子的棋盘且与它有同一中心。与写有-1的白格相邻的黑格位于象这样运动所走过的封闭轨迹上：它沿着大的棋盘移动，通过对角线不多于1次，并且仅当到了棋盘的边界才改变移动的方向在1985×1986个格子的棋盘上没有这样的轨迹。

391. 经过4次变换后，所有方格中的数都变成1。

392. 答案：$\ln 1.01>2/210$。当$x>0$时，函数$y=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$递增。

393. 答案：$r=r_1r_2r_3/(r_1r_2-r_2r_3+r_1r_3)$。

394. 这样的截面是平行四边形或中心对称的六边形，它的周长不小于$4a$。考察正方体的展开图即能得证。

第十九届

395. 设A_1，B_1，C_1是给定三角形ABC各边的中点，而O是三角形外接圆的中心。线段OA_1，OB_1，OC_1把六边形分成平行四边形。因此六边形的面积等于三角形$A_1B_1C_1$面积的两倍。

396. 答案：存在。设n是k位数，它用m个1和若干个零写成，且$s(n^2)=m^2$。那么对于数$n_1=10^{k+1}n+1$(其中k是n的数字的个数)，$s(n_1)=m+1$，$s(n_1^2)=(m+1)^2$。

397. 答案：16.所有王棋都应该位于其中心与8×8棋盘的中

心重合的6×6棋盘中.

398. 答案：n种颜色. 设A, B, C是三个相邻的顶点. 线段BA, BC, AC以及从B所引的$n-3$条对角线中每两条都没有公共点. 其次，应该把所有的边以及与边AB所成的角分别是$\frac{k\cdot 180^\circ}{n}$($k=0$, 1, 2, …, $n-1$)的对角线涂上n种颜色中的一种.

399. 设$S_l(O)=O_1$. 利用S_l的对称性和关于点O的旋转，点O可以变换成以O_1为圆心、$r=OO_1$为半径的圆 ω 上的任意一点. 圆 ω 可以变换成图119所示的任意一个圆. 当围绕点O作旋转时，一连串的圆盖住整个平面.

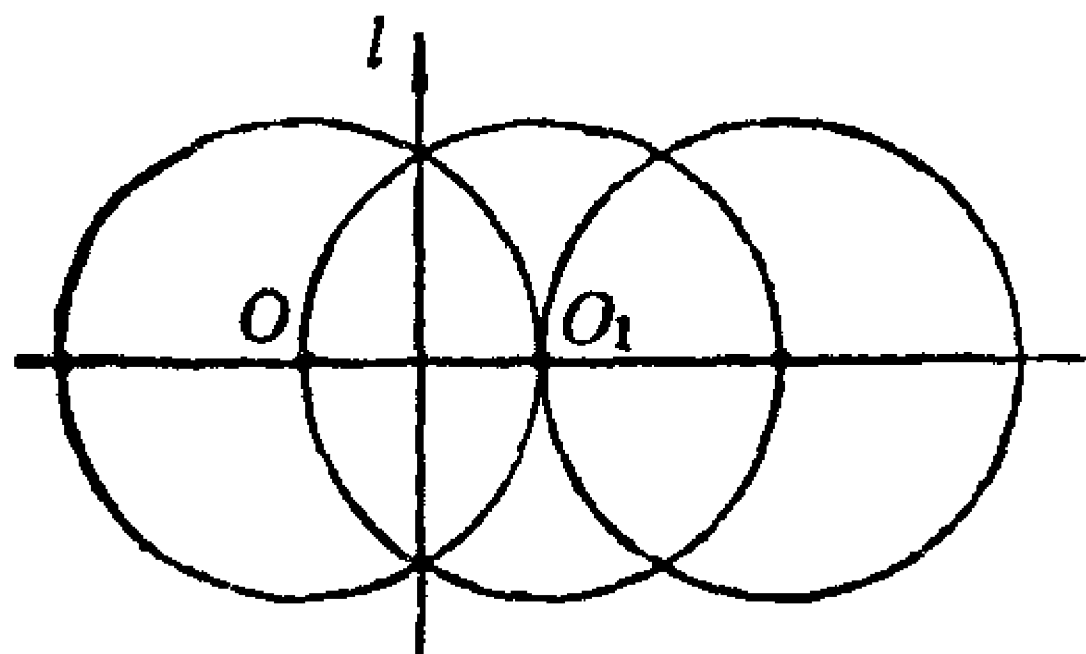


图119

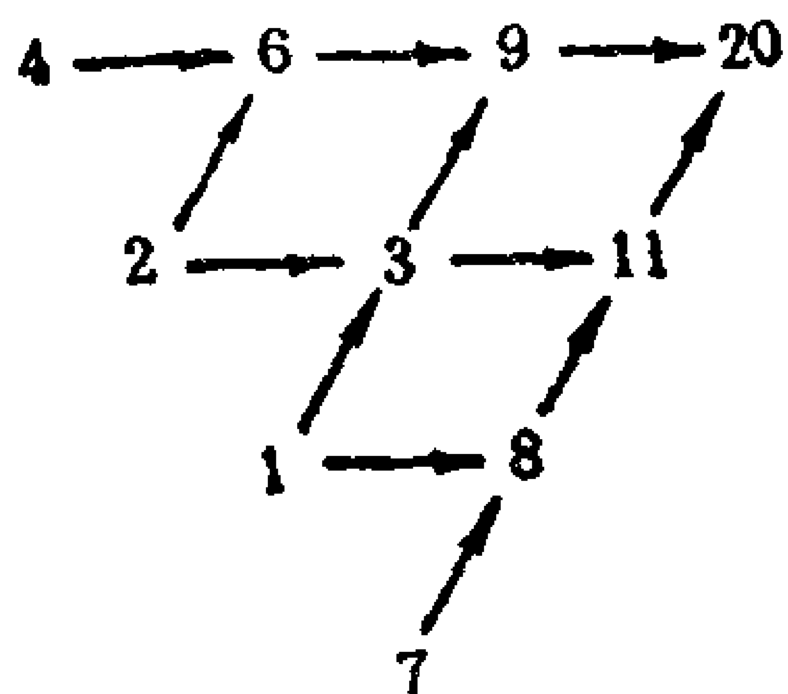


图120

400. 有两个. 如果有满足条件的三个点，那么其中某两点位于点$x=-b/2a$的同侧. 剩下的工作是估计$|y(x_1)-y(x_2)|$.

401. 答案：$d=20$(图120). 如果$d<20$，那么$20>d=2(e+h)+a+e+h+k\geqslant 2(e+h)+10$，因此$e+h\leqslant 4$. 同时可认为$e<h$. 因此或是$e=1$，$h=3$，或是$e=1$，$h=2$. 两种情况都导致矛盾.

402. 设$S_k=\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}$. 对于充分大的$k$($m<k$)有不等式$S_k<k-\frac{1}{2}$, $S_k-S_m<k-m-\frac{1}{2}$.

403. 答案：$x=\pi m$, $y=\pi n$(m, $n\in Z$). 由条件得

$$|\sin x|+|\sin y|\leqslant|\sin x|\cdot|\sin y|.$$

404. 设O和X是平面上的任意两点，$\vec{x}=\vec{OX}$. 根据条件得

$\vec{e}+\vec{e_1}=2\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{a_1}=2\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{c_1}=2\vec{d}$, $\vec{d}+\vec{d_1}=2\vec{a}$. 解这方程组，得向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$.

405. 如果$T=2^r\cdot q$（q为奇数）是给定数列的周期，那么当$q=4m+3$和$k\geqslant p+2$时：$1=a_{2^k}=a_{2^k+T}=0$，矛盾. 当$q=4m+1$时：$1=a_{2^k}=a_{2^k+3T}=0$，也导致矛盾.

406. 如果所有给定的直线两两平行，结论显然成立. 设m_2，m_3，…，m_k为有k条边的涂色区域的个数，那么$m_2\leqslant n$. 此外，每条直线被其它直线分割成至多n个部分（线段或射线），因此所有直线至多被分割成n^2个部分. 因此$2m_2+3m_3+\cdots\leqslant n^2$. 最后，$m_2+m_3+\cdots+m_k+\cdots\leqslant\frac{m^2}{3}+\frac{2m_2+\cdots+km_k}{k}\leqslant\frac{n(n+1)}{3}$.

407. 设A和B分别是盒子的底面和盖子的颜色，正方体某两个相对的面涂上别的颜色C和D，其余两种颜色设为E和F. 把正方体这样放入盒子里：使涂D色的那面落在盒子底面，而正方体涂E色的那面紧贴着盒子涂F色的一面.

408. 三角形A_2MN，A_2A_3N和NA_3O是等腰三角形.

409. 如果按n（$n\geqslant1$）次按钮得到的数组是（a_n，b_n，c_n，d_n），那么$a_n+b_n+c_n+d_n=0$，且$a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\geqslant2\cdot(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$.

410. 每一项$|a_k-b_k|$（$k=1$，2，…，n）等于一个大于n的数与一个不超过n的数之差. 因此

$$|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|=(n+1)+(n+2)+\cdots$$
$$\cdots+2n-(1+2+\cdots+n)=n^2.$$

411. 答案：涂了色的小正方体的个数是60，72，84，90，120这五个数之一. 设长方体的大小为$m\times n\times k$（$k\leqslant n\leqslant m$），未涂色的小正方体的个数是$(m-1)(n-1)(k-1)$. 依条件，$mnk=2(m-1)(n-1)(k-1)$. 故得$2<k<5$. 余下的工作是当$k=3$和$k=4$时，求关于m和n的方程的整数解.

412．K是点C关于点P的对称点，它位于经过A的圆上，并且$AKMD$为平行四边形，因此三角形AKM全等于三角形AMD．

413．设位于网格中相邻两结点A、B处的数为a和$b(a<b)$．如果从A运动到B，则画一个指向AB左侧的小箭头（图121）．

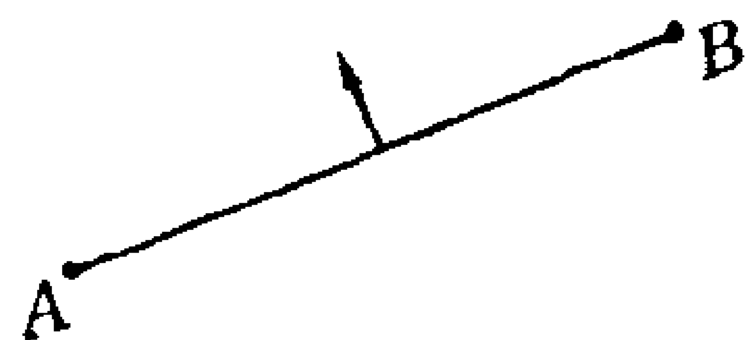


图121

如果在三角形顶点按顺时针方向递增地写数，那么在它的内部有两个箭头．如果按逆时针方向，则有一个．设第一种类型三角形的个数为n，在六边形内部的箭头个数N等于$2n+24-n=n+24$．剩下的工作是指出$N\geqslant 31$（在内部线段一侧的箭头有30个，在边界线段一侧的至少有1个．）

414．答案：3．$\sqrt{x+1}-1=x/(\sqrt{x+1}-1)$，因此当$x\geqslant -1$时，分式等于$\sqrt{x+1}-1$．

415．答案：$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}$．

416．如果矩形的边长x和y（$x\leqslant y$）满足不等式$xy>m$和$x(y-1)<m$，则这个矩形适合条件．对于任何$m>12$，当$m=k^2$时，这方程组有解$x=k-1$，$y=k+2$；当$k^2<m<k(k+1)$时，$x=k$，$y=k+1$；当$m=k(k+1)$时，$x=k-1$，$y=k+3$；当$k(k+1)<m<(k+1)^2$时，$x=y=k+1$．

417．答案：$(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$．考察两个圆，它们分别位于两个同心球面(正方体的外接球面和与正方体各棱都相切的球面)上．最小距离等于两个球的半径之差．

第二十届

418．设x_1和x_2是方程的两个根，那么

$a^2+b^2=(x_1^2+1)=(x_2^2+1)$.

419. 当兰色正方形沿着它的一条边平行移动时，八边形兰边的和将不会改变，而当兰色正方形和红色正方形的中心重合时，兰色边的和就等于红色边的和。

420. 答案：当BM是三角形的高时。

421. 1）能（图122）。

2）不能。

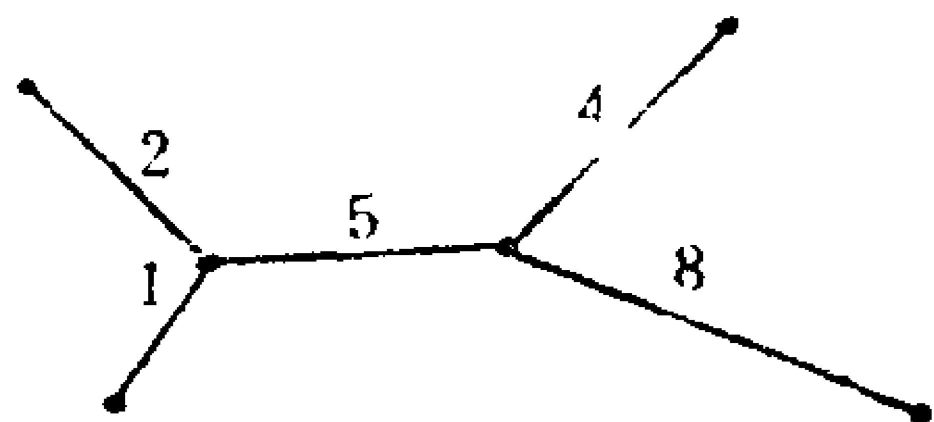


图122

如果要求的道路网存在，那么数n或$n-2$之一就是整数的平方。

挑选任意城市A并把它称为“好的”．如果任何一个城市B与A的路长是偶数，则称B为“好的”，如果路长是奇数，则称B为“坏的”．“设好的”城市有x个，“坏的”城市有y个$(x+y=n)$，将一个是“好的”另一个是“坏的”组成城市对，总共有xy对。就是说，在数1，2，…，$\frac{n(n-1)}{2}$中有xy个奇数。如果n是奇数，那么$n=n^2-4xy=(x-y)^2$；如果n是偶数，那么$n=(x-y)^2+2$.

422. 等式$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=BD^2\sqrt{2}$不成立（数$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$和$BD^2$是整数）。

423. 设$a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$，其中$a_1\geqslant3$是奇数，而其余的a_i（$i=2$，…，$n-1$）是偶数．设$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=2k+1$，$a_n=k$，那么$a_2^1+a_2^2+\cdots+a_n^2=(k+1)^2$．考察这样的数$b_1<b_2<\cdots<b_{m-1}$，其中$b_1>2a_n$是奇数，而$b_2$，…，$b_{m-1}$是偶数，同时$b_{i+1}>b_ia_n$，$b_m=s$，其中$2s+1=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{m-1}^2$.

要求的表的第i行和第j列处的数是$a_i^2b_j^2$.

424. 1）设O_1和O_2是两圆的圆心，O_3是这样的点：$AO_1O_2O_3$是平行四边形，那么O_3是三角形ABC的外接圆圆心。

2）答案：设点M、N分别沿$\overrightarrow{O_1O_2}$方向平移$|O_1O_2|$个单位，得点M^*、N^*．轨迹是：以第二个圆的圆心为圆心、第一个

圆的半径为半径的圆周除去M^*、N^*两点．

425．用0，1，2三个数把网的结点标号：1）在任何小三角形的顶点处都有这三个数，2）在六边形的顶点处有数0和1（图123）．在网结点上所有数之和除以3时有余数2．设P，Q，R是以结点为顶点的任意正三角形的顶点，如果在顶点P和Q上有相同的数，那么在顶点R上也有这个数．如果在顶点P和Q上有不同的数，那么在顶点R上是第三个数．在任何情况下，在P，Q和R上所标数字之和必被3整除．因此在任何时候，在未被涂色的结点处所标数之和除以3时有余数2．

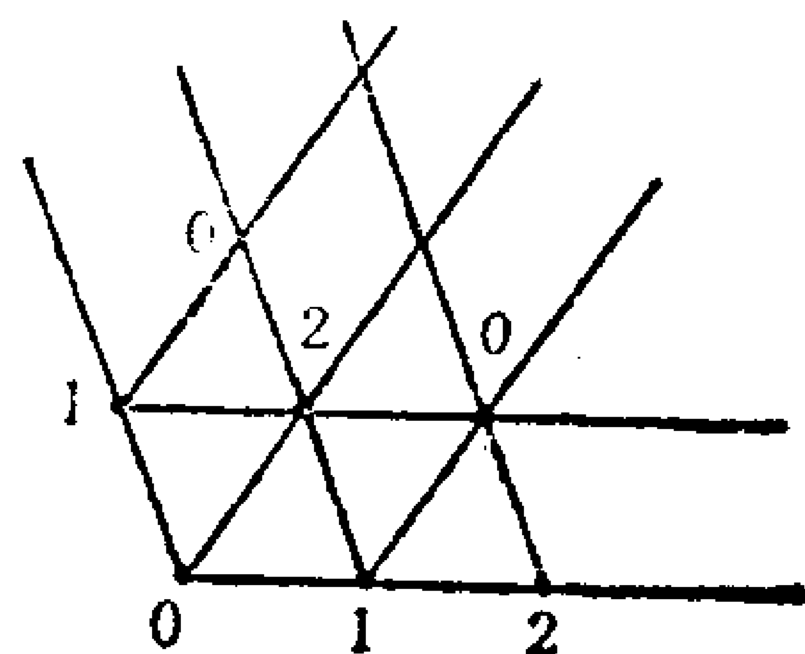


图123

426．答案：1和9．如果数$n=m^2$有m（>1）个因数，那么m为奇数($m=2k+1$)，而n有k个小于m的因数，因此被$2k-1$整除．

427．可以认为$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$．不等式可由下面的估计得到：

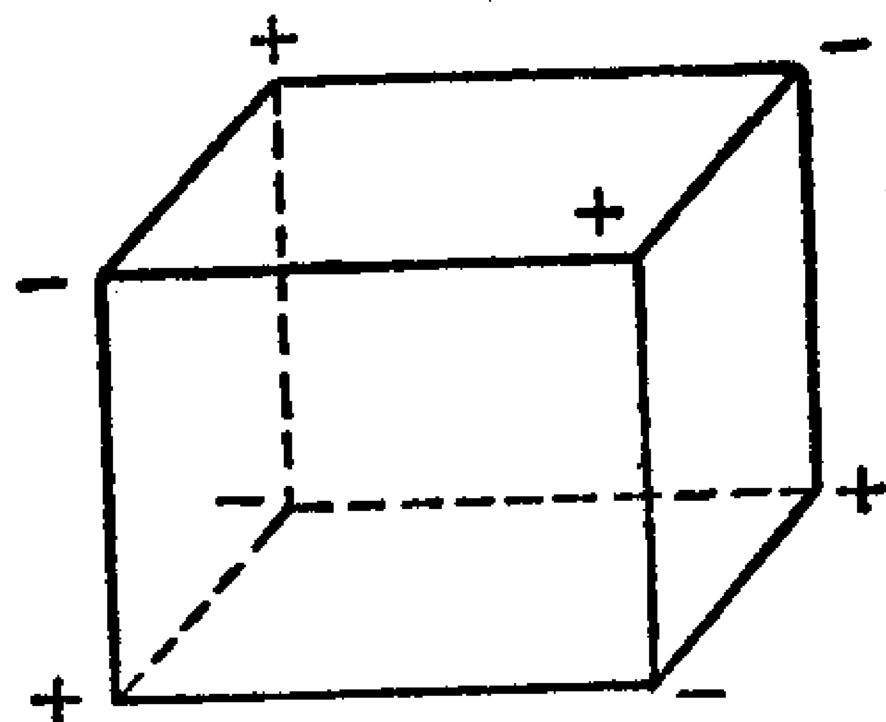


图124

$$\frac{2}{a_1+a_2}\leqslant\frac{1}{a_1},$$

当$2\leqslant k\leqslant\frac{n+1}{2}$时，

$$\frac{2k-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1}}\leqslant\frac{2k-1}{a_k+\cdots+a_{2k-1}}\leqslant\frac{2k-1}{k\cdot a_{k-1}}<\frac{2}{a_{k-1}},$$

$$\frac{2k}{a_1+a_2+\cdots+a_{2k}}\leqslant\frac{2k}{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}\leqslant\frac{2}{a_k}.$$

428．答案：AB，AC，$\angle BAC$的平分线，三角形ABC外接圆在A点的切线，三角形AB_1C外接圆在A点的切线（其中B_1是B关于A的中心对称点）．

429．要求的摆法可重复用下列两步从一些零组成的摆法得到：（1）交换平行于正方体某一侧面的两层单位小正方体的位

置；（2）在正方体（图124）的四个标“+”号处的小正方体上增加一个数，而同时在标“－”号处的小正方体上减去同一个数。

430．答案：$x=3$，$y=2$，$z=1$，$n\geqslant 2$；$x=6$，$y=8$，$z=4$，$n\geqslant 2$；$x=8$，$y=3$，$z=7$，$n=2$．

431．设O和O'为给定的两点，为确定起见，设点O'位于三角形OA_1A_2的内部或边上，那么$O'A_1+O'A_2<OA_1+OA_2$，$O'A_i-OA_i\leqslant 10cm$（$i=3, 4, \cdots, 12$）．

432．答案：可以．应该这样向所有杯子倒牛奶：一个杯子倒200克，其余杯子各倒100克．

433．答案：1）1；　2）5000/4999．

1）作关于矩形中心的对称变换，使涂成的颜色变到对面的位置上．

2）考察白色和黑色线段在矩形一边上的投影．

434．1）设O为正多边形的外接圆心，那么$\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}$，并且在和式中只要在有偶数下标的项前取“+”，其余项前取“－”即可．

2）在和式中设$\overrightarrow{MAi_1}$，$\overrightarrow{MAi_2}$，$\cdots$，$\overrightarrow{MAi_k}$取“+”，$\overrightarrow{MAj_1}$，$\overrightarrow{MAj_2}$，$\cdots$，$\overrightarrow{MAj_{n-k}}$取“－”．如果和式等于$\vec{0}$，那么

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{n-2k}(\overrightarrow{OAi_1}+\overrightarrow{OAi_2}+\cdots+\overrightarrow{OAi_k}-\overrightarrow{OAj_1}-\overrightarrow{OAj_2}-\cdots-\overrightarrow{OAj_{n-k}})$$

，而M由这些条件唯一确定．

435．答案：1）当$n=3$时，1；当$n\geqslant 4$时，$(n-1)^2-1$；2）$n-2$．

436．只需要证明：对所有x，不等式$|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>8/5$成立．

437．在1至1986的数中，被3^6整除的数有两个：$729=3^6$和

$1458=2\cdot3^6$，除$\frac{1}{729\cdot1458}$外，通过求公分母得所有分数的和为分数$\frac{a}{3^{11}\cdot b}$，其中b不被3整除。

438．任何切线截去了具有锐角 φ的直角三角形，其面积$1-\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi+1}\leqslant(\sqrt{2}-1)^2$．正方形和三角形的公共部分的面积$S$满足不等式$S\geqslant4-3(\sqrt{2}-1)^2>3.4$。

439．答案：$[\frac{n}{2}]+1$．对应于每个值$m=0$，1，2，…都有一个多项式$P_m(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+2b_i)x^i$与之对应，其中$a_i$与$b_i$分别是$n-2m$和$m$表为二进制的数字．$P_m(x)$中的每个多项式都是相容的，反之，每个相容的多项式都与$P_m(x)$中的某多项式相同。

440．设A_1，B_1，X_1，Y_1分别为四面体的侧面BXY，XYA，YAB，ABX与球的切点，那么$\triangle XY_1B\cong\triangle XA_1B$，$\triangle AY_1X\cong\triangle AB_1X$等等．利用这些等式可以证明空间四面体$AXBY$的内角和等于$\angle AY_1B+\angle AX_1B=2\angle AX_1B$，并说明$\angle AY_1B+\angle AX_1B$不依赖于$X$和$Y$。

第二十一届

441．$x_1+y_1=x_2+y_2=\cdots=x_{10}+y_{10}=9$，且$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=y_1+y_2+\cdots+y_{10}$．因此差$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_{10}^2=9(x_1+\cdots+x_{10}-y_1-y_2-\cdots-y_{10})=0$。

442．答案：1，2，4，8，16，32．设$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_6$——砝码的质量．显然，$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=4$．如果对所有$k\leqslant m$，$x_k=2^{k-1}$，那么$x_{m+1}=2^m$，因为能用砝码1，2，…，$2^{m-1}$称的最大

质量等于2^n-1.

443. 设B为A_1A_2和A_3A_4的交点，三角形BA_3A_1是等腰三角形，而$\triangle A_2BA_3\backsim\triangle A_1BA_4$.

444. 答案：1）射击12次；2）射击20次.

1）在7×7的正方形中，能放置12个不重叠的1×4的矩形；2）对每个3×4的矩形都必须射击5次.

445. $2(1+2^{1987}+\cdots+n^{1987})=(n^{1987}+2^{1987})+\cdots+(2^{1987}+n^{1987})+2=(n+2)M+2$，，其中$M$是整数.

446. 答案：1）11个图形. 在每个2×2的正方形中，至少有两格被盖住.

2）在7×7的正方形结论是成立的. 如果对$(6n+1)\times(6n+1)$的正方形结论也成立，那么在$(6n+7)\times(6n+7)$的正方形的一个角上放置$(6n+1)\times(6n+1)$的正方形，而余下部分可分割成2×3的矩形.

447. 设A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2是各边延长线与所引直线的交点. 点B_1和B_2位于等腰梯形$A_1A_2C_1C_2$的外接圆上.

448. 如果结论不成立，那么每条包含某折线一条边的直线与其它折线的边相交于内点，并且这些交点的个数是偶数.

449. 答案：121，241，361，481，601. 由$a_i=i\cdot n!+1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ n个数组成的任意数组满足条件，这组数中的任意k个数之和被k整除.

450. 设F是对角线BD与CE的交点. 点A，F，D，F位于同一圆上，点A，B，C，F也位于同一圆上.

451. 答案：$\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in Z)$. 如果α满足条件，那么$\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{4}$（否则$\cos4\alpha>0$）. 同样，对于任意自然数$n$有：$\cos2^n\alpha\leqslant-\frac{1}{4}$. 由此得$\left|\cos2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{4}$. 但是

$$\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|=2\left|\cos 2^{n-1}\alpha-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\cos 2^{n-1}+\frac{1}{2}\right|$$
$$\geqslant\frac{8}{2}\left|\cos 2^{n-1}\alpha+\frac{1}{2}\right|,$$

于是对任何n

$$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

由此可见 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

452. $k^3=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC+k(aB+bC+cA)$.

453. 划出方格表的左上角的格子，然后考虑区域：3×3的正方形去掉这个格子后剩下的区域，5×5的正方形去掉3×3的正方形后剩下的区域：7×7的正方形去掉5×5的正方形后剩下的部分，等等．这样构造的任何区域中的数之和不大于2．

454. 设$\angle ABC$的平分线及其关于圆心对称的直线l分别与平分线的垂线交于点L和N，那么$NP=KL=LM$，$PM=LN$．

455. 答案：1）；2）：先写者．1）例如：第一人写6．我们将4，5，7，8，9，10分成三组(4，5)，(7，8)，(9，10)．第二个人只能写某一组中的一个数．以后，不管第二个人写哪一组中的数，第一个人只要写上同一组中的另一个数即可．

2）考察新的游戏：规则与1）相同，只是自然数p中没有数字1，在这次游戏中，如果第一个人有获胜的策略，那么他马上就应用它．如果没有，那么他先写1，然后在新游戏中应用赢第二个人的策略．

456. 7天．设由9个勇士值班的天数为k，由10个勇士值班的天数为l，而且每个勇士值了m天班．因此$9k+10l=33m$．当$m=1$时，无解；而当$m=2$时，$k=4$，$l=3$．

457. 如果有标记的结点数有限，那么把所有向量都放在右上方的结点上，结果使$y>0$和$x>0$以及$y=0$的向量(x, y)比其余的多。把所有向量放在左下方的结点上，结果使$y>0$和$x>0$以及$y=0$的向量(x, y)比其余的少。

458. 考察给定p边形的顶点A_{p-1}，A_p，A_1，A_2，A_3和A_4，引对角线A_1A_3，A_2A_4，A_pA_2，$A_{p-1}A_2$。设B_1，B_2分别是对角线A_pA_2与A_1A_4、A_1A_3的交点，而B_4，B_3分别是$A_{p-1}A_2$与A_1A_4、A_1A_3的交点（如果$p=5$，那么$B_4=A_4$）。由面积相等得$B_1B_2=B_2A_2$以及$A_1B_2=B_2B_3$。因此$A_1A_4 /\!/ A_2A_{p-1}$，矛盾。

459. 设$T_p(n)$为T_p中所有小于$(2^n)!$之数的集合，$N_p(n)$为这个集合中数的个数。$T_p(n)$中的任一数可表示成$\beta_0+\beta_1(2^1)!+\beta_2(2^2)!+\cdots+\beta_{n-1}(2^{n-1})!$的形式。设$A_p(n)-1$是$T_p(n)$中所有数的系数$\beta_0$，$\beta_1$，…，$\beta_{n-1}$中之最大者。对任何$k$（$k=0$，1，2，…，$n-1$），$(2^k)!$的系数不会有多于$A_p(n)$个不同的值。因此，$N_p(n)\leqslant(A_p(n))^n$。剩下的是证明下列引理：1）$A_{p+1}(n)\leqslant A_p(n)\cdot N_p(n)\leqslant(A_p(n))^{n+1}$；2）$A_{1987}(n)\leqslant 2^{(n+1)^{1987}}$；3）对某个$n$，$2^{(n+1)^{1987}}<(2^n)!$；4）当$n\geqslant 2$时，$(2^n)!>2^{2^n}$；5）对某个$n$，$2^n>(n+1)^{1987}$。

460. 1）如果$f(0)=a$，那么$f(-a)=0$，且$f(0)=-a$，因此$f(0)=0$。

当$x_0\neq 0$时，等式$f(x_0)=x_0$不成立。

2）答案：

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{当}x=0\text{时}, \\ -\dfrac{x}{2} & \text{当}4^k\leqslant |x| <2\cdot 4^k\text{时}, \\ 2x & \text{当}2\cdot 4^{k-1}\leqslant |x| <4^k\text{时}. \end{cases}$$

461. 设A为多面体的一个顶点，AA_1，AA_2，…，AA_n是由A引出的棱。把棱AA_1涂成蓝色，其余棱涂成红色，把折线

$A_2A_3\cdots A_n$的所有边涂成蓝色，棱A_1A_2涂成红色．依次添加与涂色部分相邻的侧面．如果在添加的一个侧面上有两条涂色的棱，那么第三条棱可涂上任意一种颜色，如果只有一条涂色的棱，那么其余的两棱就分别涂上不同的颜色．

462．$(1+\frac{1}{2n})^n-(1-\frac{1}{2n})^n-1=\frac{a_3}{(2n)^3}+\frac{a^5}{(2n)^5}+\cdots$，

其中a_3，$a_5\cdots$是正数．

第二十二届

463．答案：23．要证明23个以上的故事不可能都从具有奇数页码的页开始．

464．解此题的关键是利用三角形中位线的性质．

465．我们将求形式为$x=mn$、$y=nk$、$z=mk$的解，其中m、n、k是自然数(这样所要求的整除性的条件就满足了)．方程就有形式$mn-nk+mk=1$或者$n(k-m)=mk-1$．只考虑使$k-m=1$的那些解．那么$k=m+1$，$n=mk-1=m^2+m-1$．于是就得到了无穷组解：

$x=m(m^2+m-1)$，$y=(m^2+m-1)(m+1)$，

$z=m(m+1)$，$m\in N$．

466．用a_1、a_2、$\cdots$、a_{19}表示第一行的数，用b_1、b_2、$\cdots$、b_{88}表示第二行的数，为确定起见，设 $a_1+a_2+\cdots+a_{19}\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_{88}$ （＊）

（如果是相反的不等式也可类似地考虑）对于每一个$i=1$，2，$\cdots$，88，用n_i表示使$S(n)=(a_1+\cdots+a_n)-(b_1+\cdots+b_i)\geqslant 0$的最小的$n$（由于（＊）那样的$n_i$是存在的）．把$S(n_i)$表示为$S_i$、因为对于每一个$j$，$a_j\leqslant 88$，那么$0\leqslant S_i\leqslant 87$．如果所有$S_i$都

不相同，那么其中必有0，由此立即能得到此题的结论．如果$S_k=S_l$，$k<l$，那么在记$t=n_k$，$v=n_l$之后，由等式$a_1+\cdots+a_t-(b_1+\cdots+b_k)=a_1+\cdots+a_v-(b_1+\cdots+b_l)$得到$b_{k+1}+\cdots+b_l=a_{t+1}+\cdots+a_v$，这就是所要证明的．

467．答案$m=-1989$．解此题时要考虑变量取负值的情形并要说明函数单调的理由，还要证明解的唯一性．

468．证明时主要利用在三角形的内角中，角大者其正弦值也大的关系．

469．假设可用所要求的方式编制值日表．设根据这张值日表，9（1）班的学生更换了a次，9（2）班学生更换了b次，那么由此题的条件应有等式$a+b=32\cdot29$．同时因为根据条件最后值日的应该是第一对学生，数a是32的倍数，而b是29的倍数．所以$a=32\cdot29-b$是29的倍数．因为32与29互质，那么由此得到a是$32\cdot29$的倍数，而因为$a\geqslant0$，所以$a\geqslant32\cdot29$.类似可得$b\geqslant32\cdot29$．于是得到了与$a+b=32\cdot29$矛盾的结果．所以用所要求的方式编制值日表是不可能的．

470．用$\angle(l,n)$表示为使直线l平行于直线n而直线l需沿反时针方向转动的角度．

引理．不在同一直线上的点P、Q、R、S位于同一圆周上当且仅当$\angle(QP,QR)=\angle(SP,SR)$（图125）．此引理可由关于圆周的内角定理来得证．

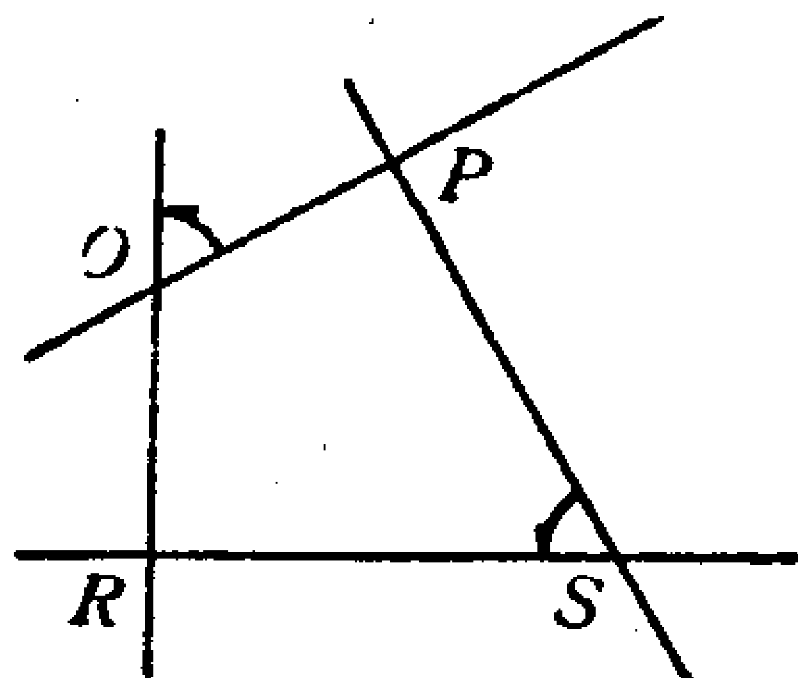


图125

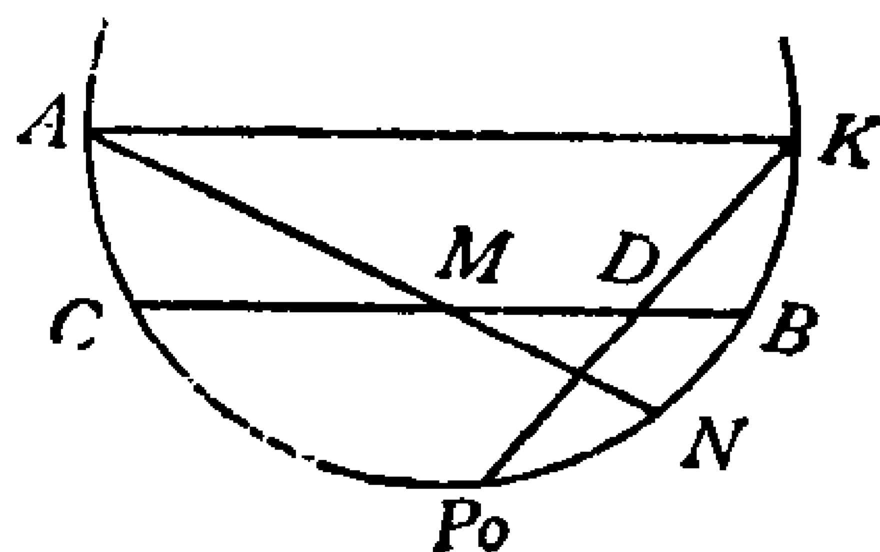


图126

作$AK\parallel BC$（$K\in S$，图126）．延长线段KD，使之与圆

周S交于点P_0。我们要证明：对于满足此题条件的每一个点M，点P与P_0重合。分两种情形：

1）点N与P_0不同。因为点A、K、P_0、N都在圆周S上，那么$\angle(AK, KP_0)=\angle(AN, NP_0)$。因为$BC \parallel AK$，则$\angle(AK, KP_0)=\angle(BC, KP_0)$。就是说$\angle(MD, DP_0)=\angle(MN, NP_0)$，即点$M$、$N$、$P_0$、$D$共圆，所以$P_0=P$。

2）点N与P_0重合。在以P_0为中心、把K变为D的同位相似作用下，直线AP_0变为自身，而直线AK变为直线MD（因为$AK \parallel MD$）。就是说点A变为点M。因此圆周S变为三角形NMD的外接圆周。因为点$P_0=N$是同位相似的中心，这两个圆周没有更多的公共点，即$P=P_0$。

显然，所求的点M是点P_0对直线BC的正交射影。这个射影在线段BC的内部（$\angle A$为锐角）且不与点D重合，因为$\angle KDC=\angle DKB+\angle KBD$是钝角。

471. 点B、E、D、C都在以O为圆心、BC为直径的圆周上，而由O向ED所作垂线OH平分ED，所以$EH=HD$。OH是直角梯形$BCGF$的中位线，所以$FH=HG$。于是

$$EF=FH-EH=HG-HD=DG.$$

472. 由关于算术平均和几何平均的不等式得

$$S^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+2\geqslant x^2+y^2+z^2+2=3.$$

当$x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$时得$S=\sqrt{3}$。所以$\sqrt{3}$是所求的最小值。

473. 以A为中心、3为半径的球面与立方体表面的交线为3

条圆弧：$\overset{\frown}{KL}$、$\overset{\frown}{LN}$、$\overset{\frown}{NK}$（图127）．点K、L、N为相应棱上的中点．确实，$AD_1=\sqrt{8}$，$LD_1=\sqrt{AL^2-AD_1{}^2}=1$．类似可证$K$、$N$也都是中点．

设点M为圆弧KL上的一点，且不与此弧的任一端点重合．考察以点M为中心、3为半径的球面．点A在这个球面上．不难证明立方体的其余的点都在这个球面的内部．

由此得到，用长度为3的线段只能把点M与点A连结起来．因此只当折线的第一条边的另一端落在点L、K或N之一时才能延伸折线．可以这样来延伸折线：从点K延着长度为3的线段到达点D（除去点A外只能到达点D）．类似地从点L和N仅可到达点B和A_1，所有这些点都是立方体顶点A相邻的顶点．类似地折线的下一个顶点必是立方体一条棱的中点，再下一个顶点是C、B_1、D_1之一．随后的顶点又将重新是一条棱的中点，而折线的第6条边的端点能落到与点A相对的顶点C_1上．图128所示的情形是一个例子．所以满足此题要求的折线的边数最少为6．

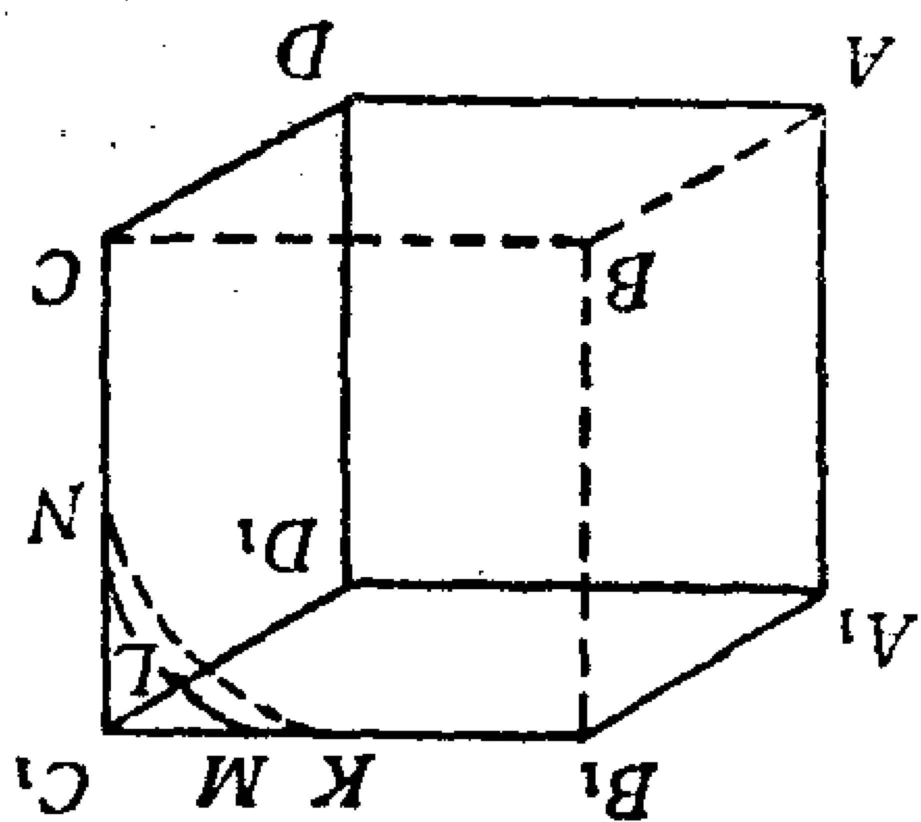


图127

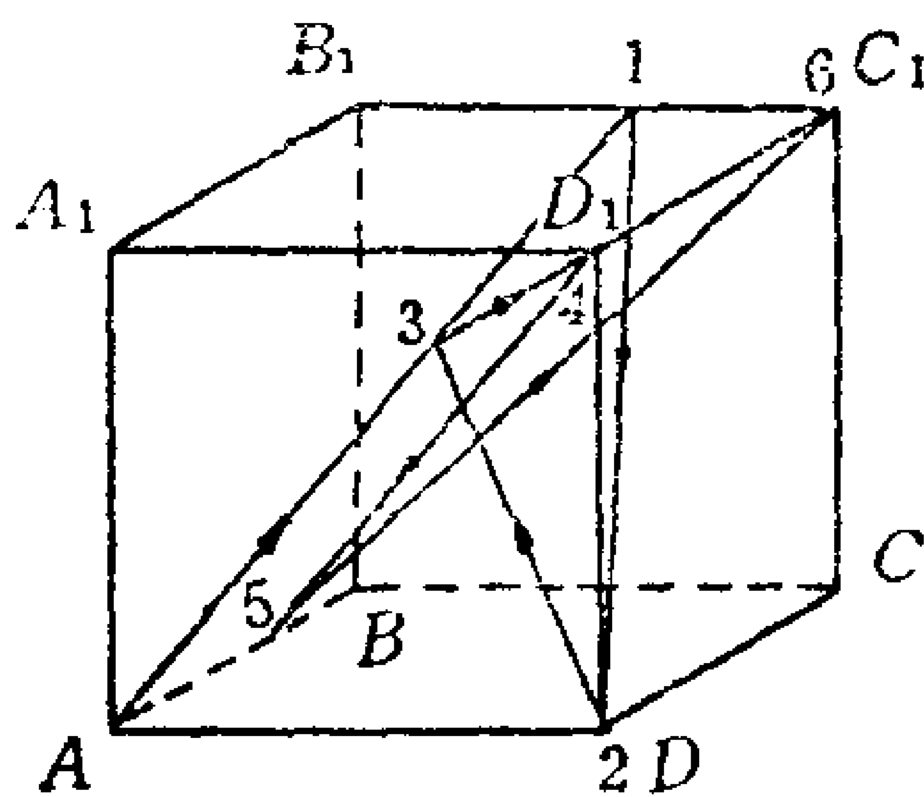


图128

474．此题结论的证明用关于n的数学归纳法来进行．当$n=1$时结论成立是显然的．假设对一切$n<n_0$结论成立并来证明当$n=n_0$时它的正确性．

当$m=n_0$或者$m=n_0+1$时，容易看到所要求的分法是存在的．分三种情形来讨论：

1）数m满足不等式$m\geqslant 2n_0$．那么

$$k=\frac{n_0(n_0+1)}{2m}\leqslant\frac{n_0+1}{4},$$

因此$n_0\geqslant 4k-1$，$n_0-2k\geqslant 2k-1>0$．注意到$1+2+\cdots+(n_0-2k)=(1+2+\cdots+n_0)-((n_0-2k+1)+\cdots+n_0)=km-k(2n_0-2k+1)$能被$k$整除．因为$n_0\geqslant 4k-1$，则有

$$\frac{1+2+\cdots+(n_0-2k)}{n_0-2k}=\frac{n_0-2k+1}{2}\geqslant k,$$

即

$$m^*=\frac{1+2+\cdots+(n_0-2k)}{k}\geqslant n_0-2k.$$

因此，根据归纳假设，数1、2、…、n_0-2k可以分成k组，每一组的和都等于m^*．剩下的那些数n_0-2k+1、n_0-2k+2、…、n_0-1、n_0也可以分成k组，每组两个数，且每组的和都等于$2n_0-2k+1$．再把这k组数归并到前面已得到的k组数中，就得到了所要求的分法．

2）数m为偶数且满足不等式$n_0+1<m<2n_0$．

3）数m为奇数且满足不等式$n_0+1<m<2n_0$．

情形2）与3）类似．建议读者自己去研究它们．

注．$m\geqslant n$这个条件是必须的．例如，当$n=2$时有$1+2=3\cdot 1=1\cdot 3$，数1、2可以分成一组，其和为3，但不能分成其和为1的3组数．

475．这一比值等于对角线与梯形的较长的底边夹角的正切值．

476．用c表示新写的数$ab+a+b$．那么$c+1=ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$．就是说，如果不去考察黑板上已写的数，而去考察比所写数大1的数，那么每一个新写的数就等于两个已有数的乘积．因为我们是从数2、3开始的，那么在若干次乘积之后就得到形为$2^n\cdot 3^m$的数，其中n、m为自然数．显然，那种形式

的所有数都能得到．就是说，在原来的情形中只能得到形为$2^n\cdot3^m-1$的数．数13121是那样的数，而12131不是．

477．如果$xy=0$，那么$1-xy=1^2$．如果$xy\neq0$，把已知方程两边同时平方并同时减去$4x^5y^5$得$(x^5-y^5)^2=4x^4y^4-4x^6y^6$，由此得

$$1-xy=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2.$$

478．为了按照此题的要求组织空中交通，至少必须21个航空公司，因为直达航线的总数不少于$20+19+\cdots+3+2+1=210$，而每一个航空公司在$4+3+2+1=10$条直达航线上服务．21个航空公司服务的线路图见图129所示（正21边形的顶点是城市，而正21边形的边和对角线是直达航线）．第一个航空公司服务于号码为1、3、8、9、12的城市，而其余的航空公司服务的城市是由上面所指出的一组城市旋转$k\cdot\frac{360^\circ}{21}$度角得到的，$k=1,2,\cdots,20$．此题的要求是满足的，这是因为在连接号码为1、3、8、9、12的顶点的所有线段中，正21边形的一条边及这些顶点之间所有可能的对角线各出现一次．

479．只要证明下标为$4m+1$的项中有无穷多个能被3整除的数即可．

例如，数列(a_n)的下标为$36p+17$、$36p+25$、$36p+33$（p为自然数）的项是奇合数．

480．由直角三角形AMM_1与CNN_1相似（图130）

得
$$\frac{AM_1}{CN_1}=\frac{AM}{CN}=\frac{a}{b} \qquad (1)$$

由平行线等分线段定理有

$$\frac{M_1P}{PN_1}=\frac{MB}{BN}=\frac{a}{b} \qquad (2)$$

由（1）、（2）得

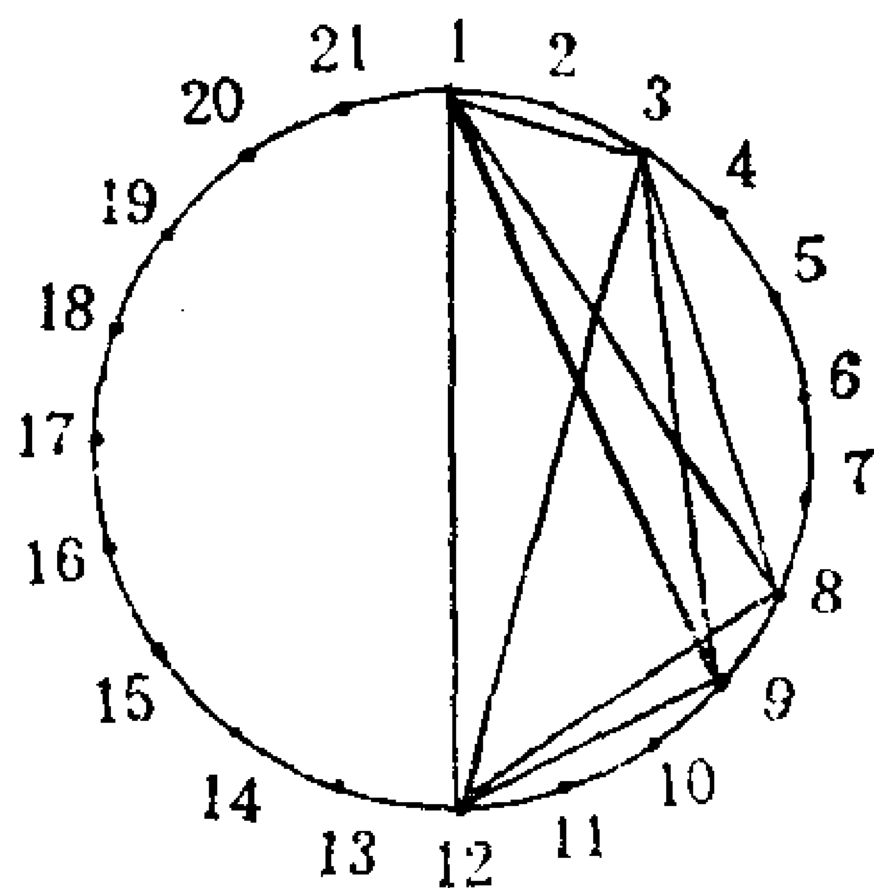


图129

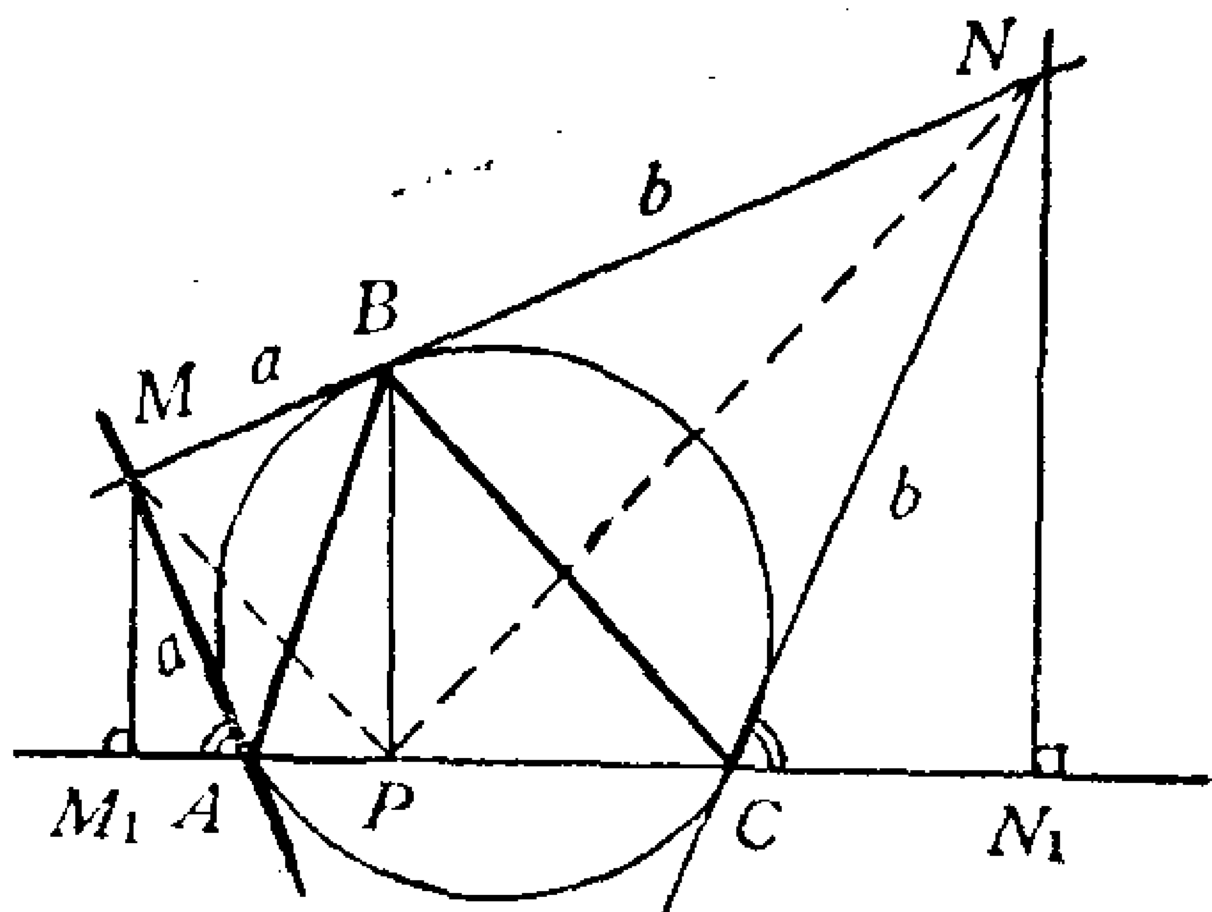


图130

$$\frac{AP}{CP}=\frac{M_1P-AM_1}{PN_1-CN_1}=\frac{a}{b}.$$

所以$\triangle MPA\backsim\triangle NPC$。由此$\angle MPA=\angle NPC$，又因为$BP\perp AC$，则$\angle MPB=\angle NPB$。

481. 在用d、c、b、a分别替换a、b、c、d时表达式$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$不改变，而两个和$a+b$与$c+d$互换。因此，不失一般性可假设$a+b\geqslant c+d$。

在恒等式

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

的右边用较小的值$\frac{1}{2}(a+b+c+d)$代替$b+c$、并用较大的值$c+d$代替因数c后，得

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

值$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$是可以达到的，例如，可取$a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=2$，$d=0$。

482．把表格的行自上而下编号、把列自左向右编号．用$O^i_{j,k}$表示将第i行加到第j列以及从第k列减去第i行的运算．

当我们对该表格依次进行运算

$$O^1_{n,1}、O^2_{n,2}、\cdots、O^{n-1}_{n,n-1}$$

之后，表格中对角线上的所有元素（除在第n行第n列上的一个元素外）都等于0，我们来考察运算序列

$$O^j_{j,i}、O^i_{i,j}、O^j_{i,j}、O^i_{n,i}、O^i_{j,n}.$$

不难验证，再对上面所得的表格进行这些运算后就得到新表格：位于第i行和第j列交点上的数等于0，而不在第n行和第n列中的其余所有数都不变化．

依次对所有$i=1、2、\cdots、n-1$，$j=1、2、\cdots、n-1$应用上述运算序列后，我们就得到这样一张表格，在其中异于0的数只可能在最后一行或最后一列．但是因为在任何行中及任何列中数之和等于0（此性质在运算过程中保持不变），那么在最后一行和最后一列中也都是0．

483．要证明$\alpha<\delta$（图131，其中l为抛物线在点A_1的切线）．为此只要证明$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}(\gamma-\beta)<\mathrm{tg}\delta$．

484．用第2个方程减去第一个方程的10倍后得一个新方程，由此可得$n\geqslant20$．当$n=20$时方程组的解是存在的：

$$\sin x_1=\sin x_2=\cdots=\sin x_{10}=-1,$$

$$\sin x_{11}=\sin x_{12}=\cdots=\sin x_{20}=1.$$

485．用$(u、v)$表示u、v的最大公约数．此题就是证明：对于每一个自然数n，下结论成立：对一切自然数$m\leqslant n$和$k\leqslant n$

$$(a_m,\ a_k)=a_{(m,k)} \qquad ①$$

用数学归纳法来证明.

当$n=1$时结论显然成立. 假设对一切$n\leqslant n_0$结论成立来证明当$n=n_0+1$时结论也成立.

如果$m\leqslant n_0$且$k\leqslant n_0$, 那么由归纳假设等式①成立. 当$m=k=n_0+1$时(1)显然成立. 剩下只要考察m或者k之一等于n_0+1而另一个不超过n_0的情形. 为确定起见, 设$m=n_0+1$, $k\leqslant n_0$. 那么$n_0=m-1\geqslant m-k=n_0-k+1\geqslant 1$, 即$m-k$是不超过$n_0$的自然数. 因此由于$(m,\ k)=(m-k,\ k)$及归纳假设, 有

$$a_{(m,k)}=a_{(m-k,k)}=(a_{m-k},\ a_k).$$

所以为了证明当$m=n_0+1$、$k\leqslant n_0$时等式①成立, 只要验证$(a_m,\ a_k)=(a_{m-k},\ a_k)$.

由已知条件得$a_m=Q(a_k)$, 其中

$$Q(x)=\underbrace{P(P(\cdots(P}_{m-k\text{次}}(x))))$$

是系数为自然数的多项式. 因为$Q(x)=Q(0)+xQ_1(x)$, 其中$Q_1(x)$也是系数为自然数的多项式, 那么

$$(a_m,\ a_k)=(Q(a_k),\ a_k)=(Q(0)+a_kQ_1(a_k),\ a_k)=$$
$$=(Q(0),\ a_k)=(\underbrace{P(P(\cdots(P}_{m-k\text{次}}(0))))=(a_{m-k},\ a_k).$$

证毕.

486. 过球心作一平行于棱AD、BC(它们的长分别为a、b)的平面(图132). 此平面与四面体的交线为平行四边形$KLMN$. 设$m=KL$, $n=LM$. 因为$KL\parallel AD$, $LM\parallel BC$, 那么

$$\frac{m}{a}=\frac{BL}{BD},\ \frac{n}{b}=\frac{DL}{BD}.$$

因而有$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1$. 由此得到: m、n中至少有一个不超过$\frac{ab}{a+b}$. 但是完全在平行四边形内部的圆的半径r不可能大于该平行四边

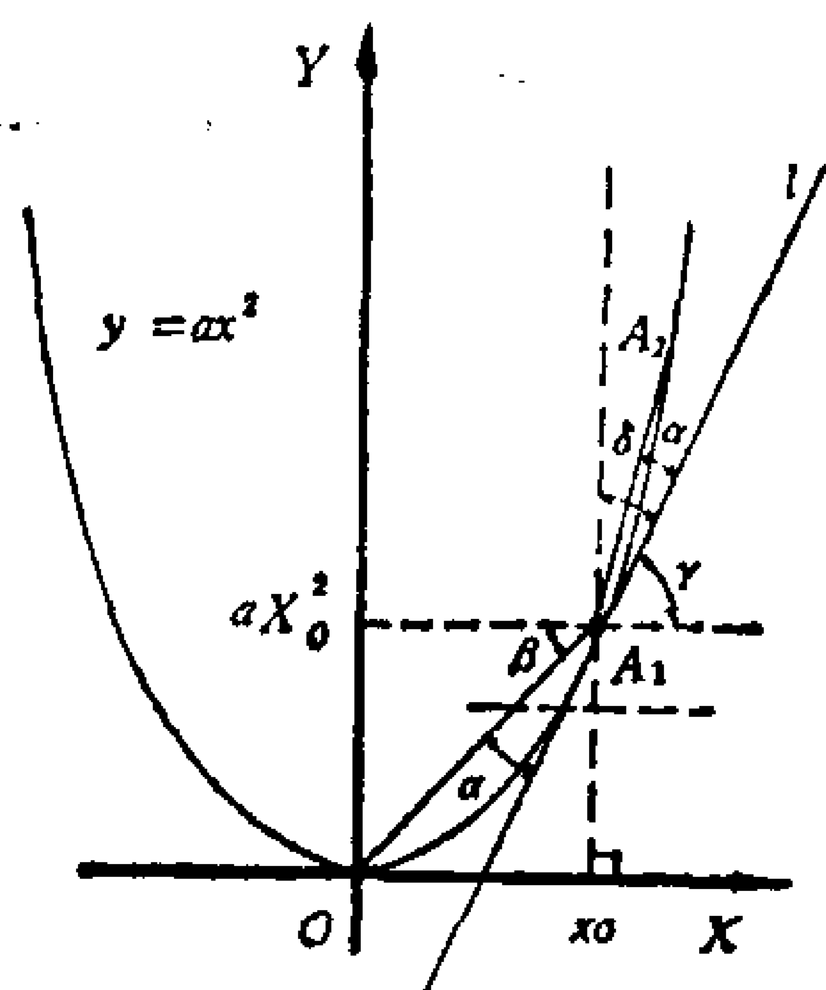


图131

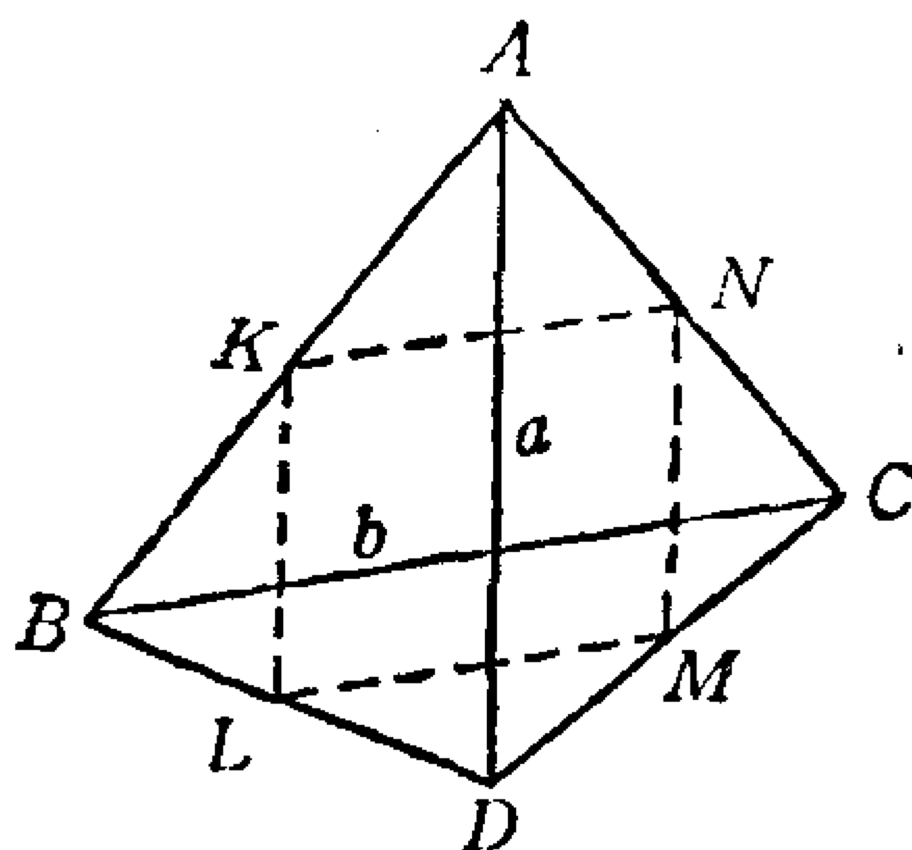


图132

形任一条边的二分之一，因此$r\leqslant\frac{ab}{2(a+b)}$。这里的等号任何时候都不成立。确实，如果 $r=\frac{ab}{2(a+b)}$，则$m=n=\frac{ab}{a+b}$，同时平行四边形$KLMN$是正方形。而因为球的切平面垂直于切点的半径，我们得到，四面体的所有四个面都与垂直于平面 $KLMN$的一条直线平行，这是不可能的。

第二十三届

487．此题的解法可以先计算相遇的总次数（如果3个男孩一次也未相遇过，那么这样的相遇共至少有$C_7^2=21$次），然后计算走近售货亭的总次数（为了第一次相遇，应该让两个男孩走近售货亭，而对于以后的每次相遇来说，仍然每次都要让两个男孩走近售货亭，这样总共不少于22次，这个数超过了前面所得到的总次数$3\cdot7=21$）．

488．答案：不可能．如果能把所有长方块摆放到盒子中，那么它们就会摆放得很紧密（由比较容积可得出这个显然的事实）并且能用其3×3或3×1的侧面紧密地铺摆成盒子的大小为

7×11的侧面。这是不可能的，因为7×11不能被3整除。

489. 为了解此题，只要利用相应切线段的长度相等的关系（图133）得到下列等式：

$AM=AB+AC-BC-AN$,

$(AN=AM)$,

$QR=KL-PQ-RS$,

$AR=AC-LC-RS$,

$MQ=AB-AM-BK-PQ$.

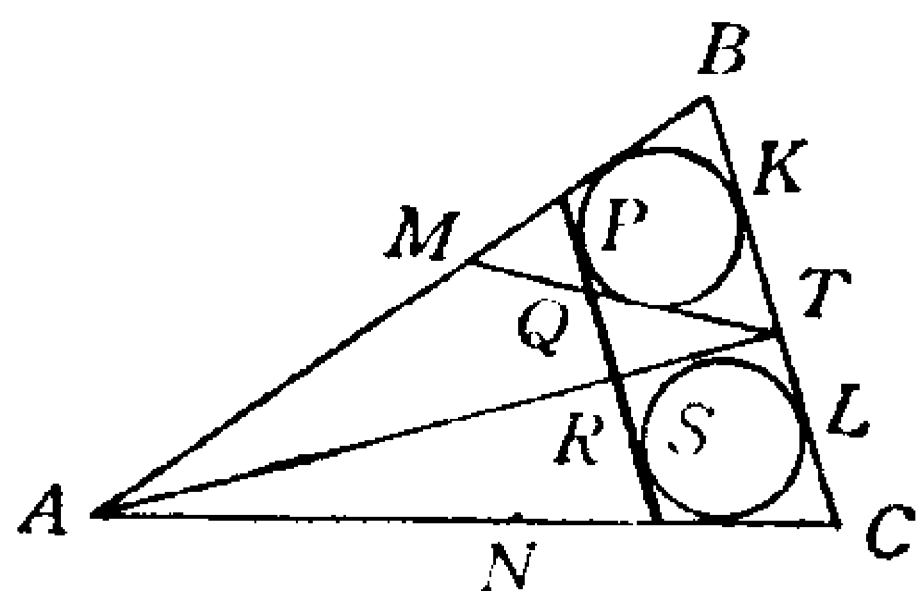


图133

然后再验证等式$AM+QR=AR+MQ$，它保证凸四边形$AMQR$有内切圆。

490. 答案：1989.用枚举法来解此题. 首先分别取$d_4=10$、11、12、13（但是，在这里最好利用关系

$$d_{d_4-1}=(d_1+d_2+d_4)\cdot d_8\geqslant d_5\cdot d_8=N,$$

因此立即得到$d_4=13$，$d_5=d_2+d_4$，$N=(d_2+14)\cdot d_8$）。然后分别取$d_2=2$、3、5、7、11，由此唯一得到$d_2=3$，$d_3=9$，$N=9\cdot13\cdot17$。

491. 此题对9年级来说是最容易的。可以把硬币分成4堆各500个，并根据重量来比较它们或者用某些计谋根据称量结果来比较它们。

492. 应正确地变换表达式$a^2+b^2+c^2+4abc-1/2(a+b+c=1=2p)$，如果把它化为$-8p(p-a)\times(p-b)\times(p-c)$的形式并且应用三角不等式，那么表达式的符号就能容易确定。

493. 我们只解2）这道对9年级来说最难的题（当$m=n$时1）是2）的特殊情形，自然它可有更简单的解法）。记

$a=S_{BCD}$，$b=S_{ACD}$，$c=S_{ABD}$，

$d=S_{ABC}$，$\alpha=\dfrac{m}{m+n}$，$\beta=\dfrac{n}{m+n}$，

$s=S_{ABCD}$，$p=S_{AMB}$，$q=S_{DKC}$，

$r=S_{AKMD}$，$t=S_{KBCM}$。（图134）。

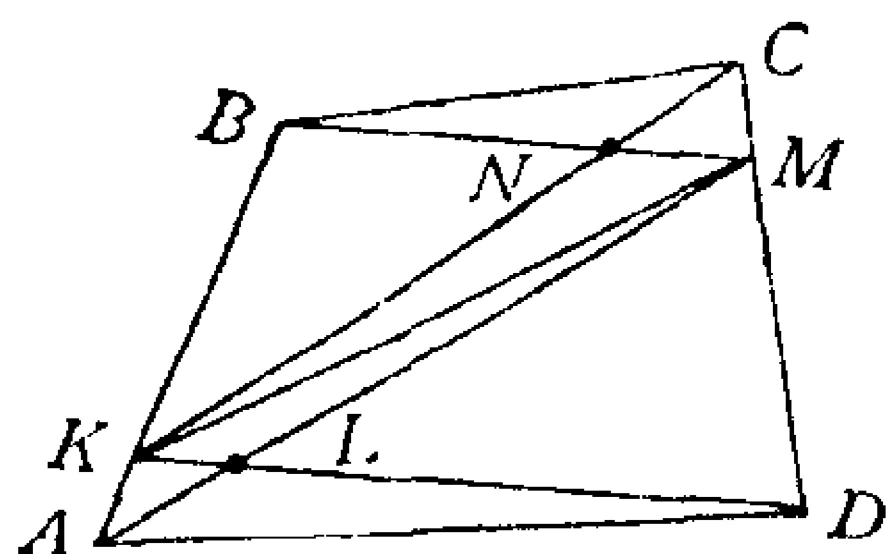


图134

那么在考察了具有公共底边或高的不同三角形并把其中需要的图形组合后就得到

$$p=\alpha c+\beta d,\ q=\alpha a+\beta b,$$

$$r=\alpha p+\beta c,\ t=\alpha q+\beta d,$$

$$S_{KLM}=\frac{\alpha\beta pq}{r},\ S_{KNM}=\frac{\alpha\beta pq}{t}.$$

注意到$\alpha+\beta=1$，所要证的不等式

$$S_{KLMN}=\frac{\alpha\beta pq}{rt}s<\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}s$$

就归结为验证下列关系：

$$\alpha(ab+cd-ac)+\beta(b^2+bd+d^2-ad-bc)>0,$$

它可由以下不等式得出：

$$ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)=(s-c-d)^2\geqslant 0,$$

$$ab+bc=(a+c)(b+d)-(ab+cd)<s^2-bd=b^2+bd+d^2.$$

494．答案：1．此题被认为对9年级来说是最好的试题。为了解此题必须作以下两步：

1）用若干个2×2、3×3的正方形以及利用恰好一个1×1的正方形组成一个23×23的正方形（例如，从23×23的正方形中剪去一个中央的单位小正方形后，就可把剩下的部分剪成4个11×12的矩形，其中每一个首先可分成2×12和9×12的矩形，然后再相应分成2×2和3×3的正方形）。

2）证明非有1×1的正方形不可。这里是一个参赛者的证明。把23×23正方形的行接连编号并把号码为1、4、7、…、22的行涂成白色，而把其余的行涂成黑色。那么任何2×2或3×3的正方形都将包含偶数个黑格。所以只由那样的正方形组成23×23的正方形是不可能的，因为23×23的正方形包含奇数个黑格。

495．答案：7．此题对10年级来说最容易．像通常那样，参赛者在解此题时接连取值$n=1$，2，…，7且同时有各种各样的计算错误（甚至有人不设法说明$n<7$时不适用的理由）．只要注意到原方程等同于双边不等式

$$10^n\cdot 0.0005025\cdots<x\leqslant 10^n\cdot 0.0005027\cdots,$$

它只当$n\geqslant 7$时有整数解x．

496．此题的解法可归结为：如果O为三角形ADF的外接圆的圆心，那么$\angle DOF=2\angle A=\pi-\angle DEF$（见图135），因此点$O$、$D$、$E$、$F$在同一圆周上且$\angle DEO=\angle DFO=\angle FDO=\angle FEO$．

497．只要注意到：分别以B、D为端点的两个球面的直径有公共端点G，而这两条直径的中点对弦AE和CE的投影正好是它们的中点（图136），所以点B、G、D对直线AC的投影相应地与点A、E、C等距．

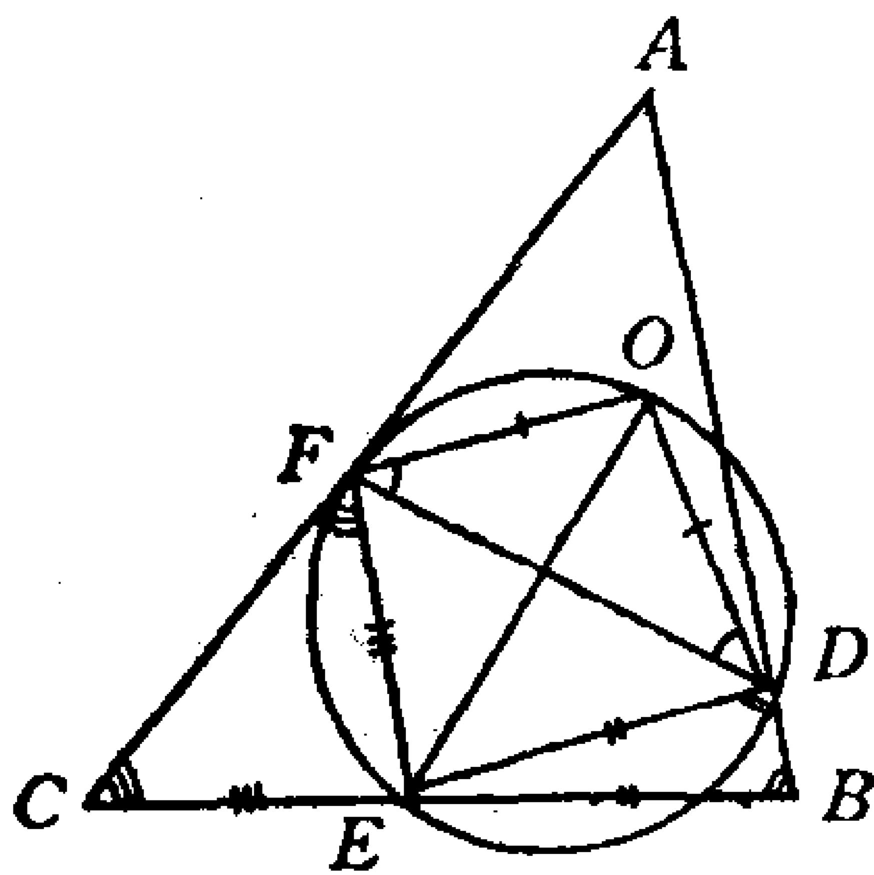


图135

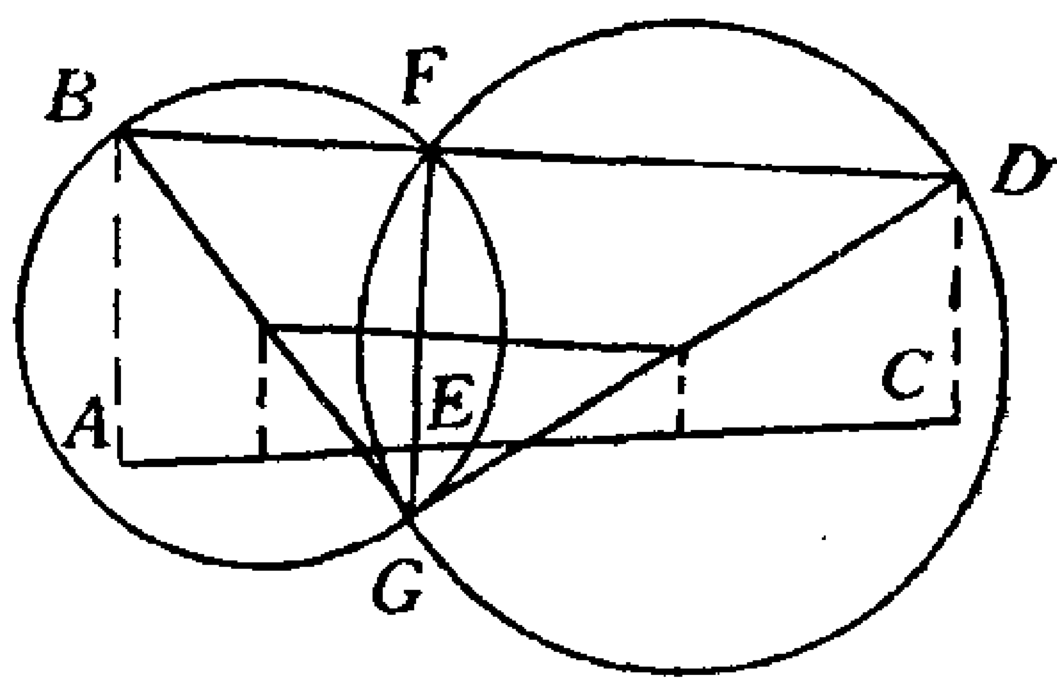


图136

498．答案：可以．参赛者认为这是最好的试题．游客行走的正确原则在于：当他们仍处在同一海拔高度上时，两个人始终不能改变自己在折线上的行走方向．但是要证明此原则能使游客达到目的不能以游客相遇前不断地接近为前提．游客的行走能终结于折线相对端点上的证明以下列设想为基础：

1）游客的行走是单值地被确定的且可逆（即如果让两个游

客从某一地点往回走，那么他们就能准确地用相反的方式通过自己所走过的全部路程）。

2）任何一个游客都不能回到自己的出发点。否则，另一个游客就会与他同时回到自己的出发点，这就是说，由于行走的可逆性和单值性，两个游客就会在中途的某地同时改变自己的行走方向，这是不可能的。

3）游客的行走不能无限长地继续下去。否则，他们的位置和行走方向又一次不可避免地重复，因此返回的行走不是单值的。

499。此题的解法多种多样，但据我们看来，下面这个解法最好。把棋盘从角上的白格开始用数1，…，8把直行和横行编号，那么棋盘上的每个格子就都有两个坐标，对于白格来说，这两个坐标的和等于偶数，对于黑格来说，这两个坐标的和等于奇数。8个棋子所在的8个格子的坐标之和是偶数2（1＋…＋8），因此在这8个格子中只可能有偶数个黑格。

500。解此题的关键是作平行四边形$AB_1A_2C_1$，其中A_2属于线段BC（图137）。注意到点A_1、B_1、C_1和A_2在同一圆周上，由此得到$\angle A_1B_1C_1=\angle C$。更准确地说，必须研究3种情形：

1）点A_2在A_1和C之间，如图所示；

2）点A_2在A_1和B之间，这与1）类似；

3）点A_1与A_2重合，此时A_1、B_1、C_1是三角形ABC各边的中点。

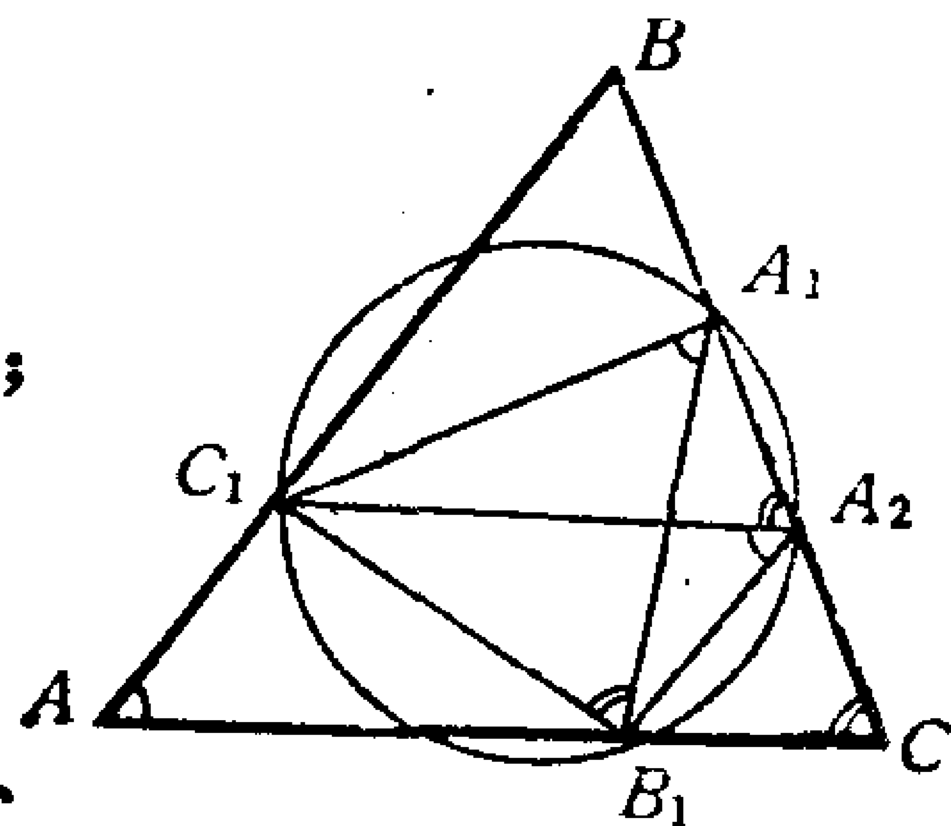


图137

501。答案：$n=3$。此题的难点显然不是验证当$n=3$时所描述的可能性，而是证明当$n>3$时的不可能性。

设A_1，…，A_n是所有的椋鸟巢，用$f(A_i)$（$i=1$，…，n）表示椋鸟从巢A_i所飞落到的新巢。那么$f(f(A_1))$，…，$f(f(A_n))$是再次飞落的新巢，它们按照起初的顺序排列着（因为此时这些

鸟巢两两之间的距离与最初的距离相等），所以对于每一个i有$f(f(A_i))=A_i$。即映射f或者使巢A_i原地未动，或者使A_i与另外某一个巢互换位置。现在假设巢的个数不小于4，那么在其中一定存在两对巢，映射f把它们变为自己并保持它们两两之间的起初的距离不变。这就是说这些巢之间的距离的不等关系保持不变，这与此题的已知条件矛盾。

502. 此题有多种解法，方法之一是：先把120个五位数分成24组，每组中是5个"循环"数（形式为$abcde$，$bcdea$，$cdeab$，$deabc$，$eabcd$），这24组数再分为若干组互为"反序"的数（例如，与上面的5个数反序的数是：$edcba$，$aedcb$，$baede$，$cbaed$，$dcbae$）。可以验证，互为反序的两组5个数有相同的平方和。然后再把它们分归不同的两组后就得到了所要求的分法。

503. 答案：1）存在；2）不存在。 1）的解法通常是研究形为

$$a^n+b^n=(1+\gamma)^n+(-\gamma)^n=m+k\gamma\ (m、k、n\in Z, n>1, k\neq 0)$$

的数在γ取$\pm\sqrt{2}$，$\pm\sqrt{3}$，…之一时的无理性。至于2），当$ab\neq 0$时（其它情形要简单得多，在这里没有指出），数$a+b$的有理性由a^n+b^n（$n>1$）的有理性以及恒等式

$$2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(a^4+b^4),$$

$$a^2b^2(a+b)=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-(a^5+b^5).$$

504. 证明下列结论为根据：在依次应用n个系数为$k=1/2$、关于点a_1、a_2、…、$a_n\in[0,1]$的同位相似后，数轴上的线段$[0,1]$变为2^n条线段（它们的长度等于k^n且填满了整个线段$[0,1]$）之一，即在二进制记数法中左端点为0、$a_n\cdots a_2a_1$的线段。

如把天花板想象为坐标平面上的正方形$[0,1]\times[0,1]$，则把上述结论应用到这个正方形对坐标轴的射影，可利用$n=8$个关于正方形顶点的同位相似把正方形与包含在其中的蜘蛛一起变换为预先指定的、对角线为$\sqrt{2}k^n<0.01$且含有苍蝇的小正方形中。

505. 用“经典”的方法解此题要更好些。考察三角形EFG，它是由三角形BCB'平移同一个向量$\overrightarrow{DC}$得到的(图138)。那么在系数为2、中心为D的同位相似下线段BC、$B'C$、$A'D$的中点变为同一直线上的点E、G、A'，因为$EA\perp AD$，$\angle AFG=\frac{1}{2}\angle EFG=\frac{1}{2}\angle ACA'=\angle AEA'$（最后的等式成立是因为点$E$、$A$、$A'$在以$C$为圆心的同一圆周上）。

506. 所求的多边形M_n $(n\in N)$可以认为由n个大小为2×1的矩形木块组成，见图139所示：

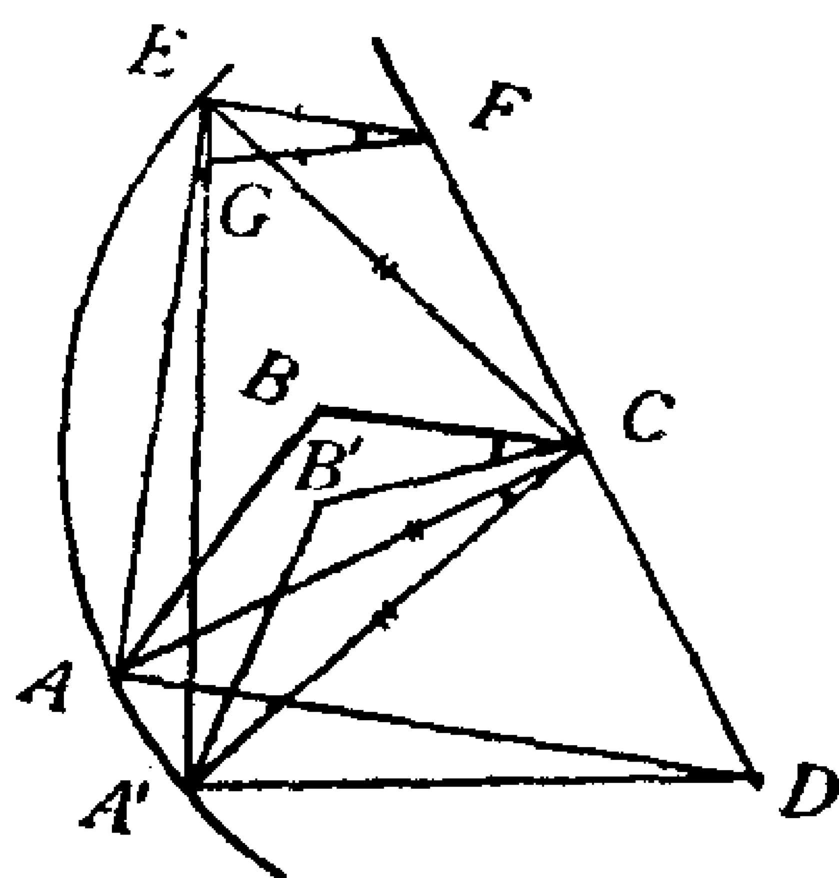


图138

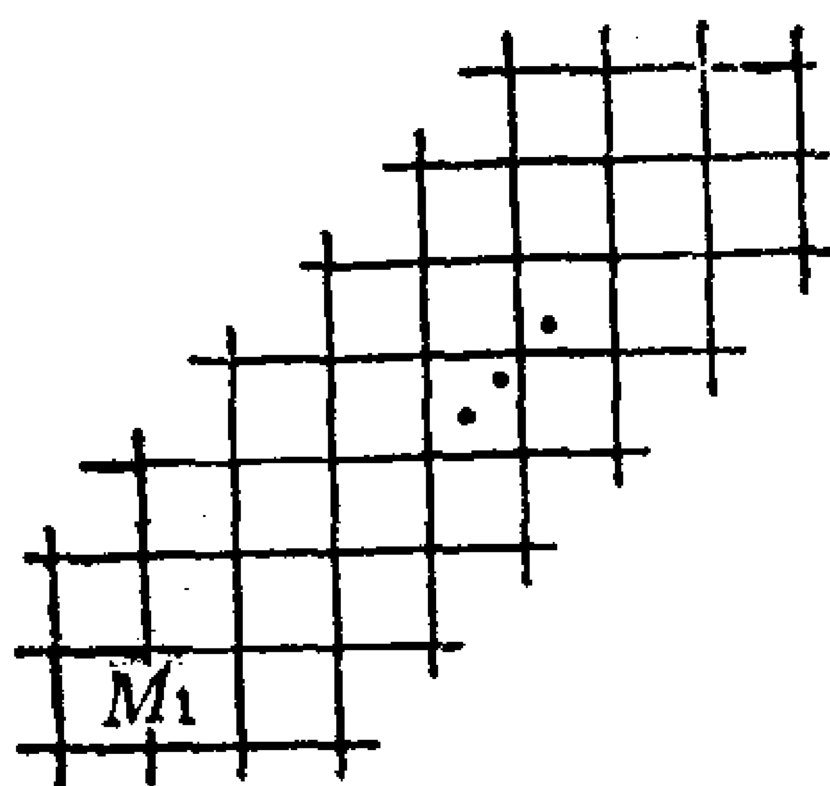


图139

先把一矩形块水平放着（即图139中的M_1），接着再把矩形块交替地贴到所得图形右上角的两侧（先上侧、后右侧）而组成拼块地板的形状。现在必须证明上面所得到的多边形M_n能够正好用$a_n=n$种方法分成2×1的矩形块。

确实，$a_1=1$且$a_{n+1}=a_n+1$成立，因为或者可以如同在作多边形M_n时贴上最后一矩形块那样用一个矩形块贴到M_n的右上角而得到M_{n+1}，或者用类似于得到M_n的左下角的方法用一矩形块贴到M_n的右上角而得到M_{n+1}。

507. 答案：2．先得到下面这个估计：

$$(x+y)(y+z)=(x+y+z)y+xz=\frac{1}{xz}+xz\geqslant 2.$$

还必须验证在已知条件下所得估计的等号可能成立（例如可取

$x=z=1$，$y=\sqrt{2}-1$）。

508．如果把箭头的起点任意放到多面体的棱上，那么奇数顶点（即有奇数个箭头指向它的顶点）的个数可以逐步减少2，只要每一次沿着连接两个奇数顶点的任意路线上改变箭头的方向就可以了。最后不可能遗留下一个顶点，因为箭头的总数与棱的总数相等，是一个偶数。

509．答案：不存在那样的函数．证明：若当 $n\geqslant2$时在所给函数的值中能找到一个最小值 $f(n_0)$，就会有下列矛盾不等式：

$$f(n_0)=f(f(n_0-1))+f(f(n_0+1))\geqslant1+f(n_0),$$

因为$f(n_0+1)\geqslant f(n_0)\geqslant1+1=2$．

510．此题对10年级来说是最难的题．为了解此题只要考察所有等分线（它们不一定相交于一点）并且注意到，每两条"相邻"的等分线AD和BC，如果它们相交，就构成蝴蝶式领结$ABCD$，即由三角形AOB和三角形COD与它们在公共点O处的角α构成的图形（图140）．由$S_{AOB}=S_{COD}$得到

$$S_{ABCD}\leqslant\frac{AD\cdot BC\sin\alpha}{4}<\frac{\alpha}{4}.$$

如果现在沿着多边形的边界按等分线AD从端点A到另一端点D的固定方向移动，那么，首先，所有蝴蝶式的领结将逐一被查看；第二，它们的总面积小于$\pi/4$；第三，这些蝴蝶式的领结能"盖住"多边形的任意点M（最后这个不十分简单的结论可证明，其思想是：点M不在射线AD和DA的同侧，因此存在"相邻"的等分线FG和EH，使点M也不在射线FG和EH的同侧，即在图140中所示的蝴蝶式领结$EFGH$中）．

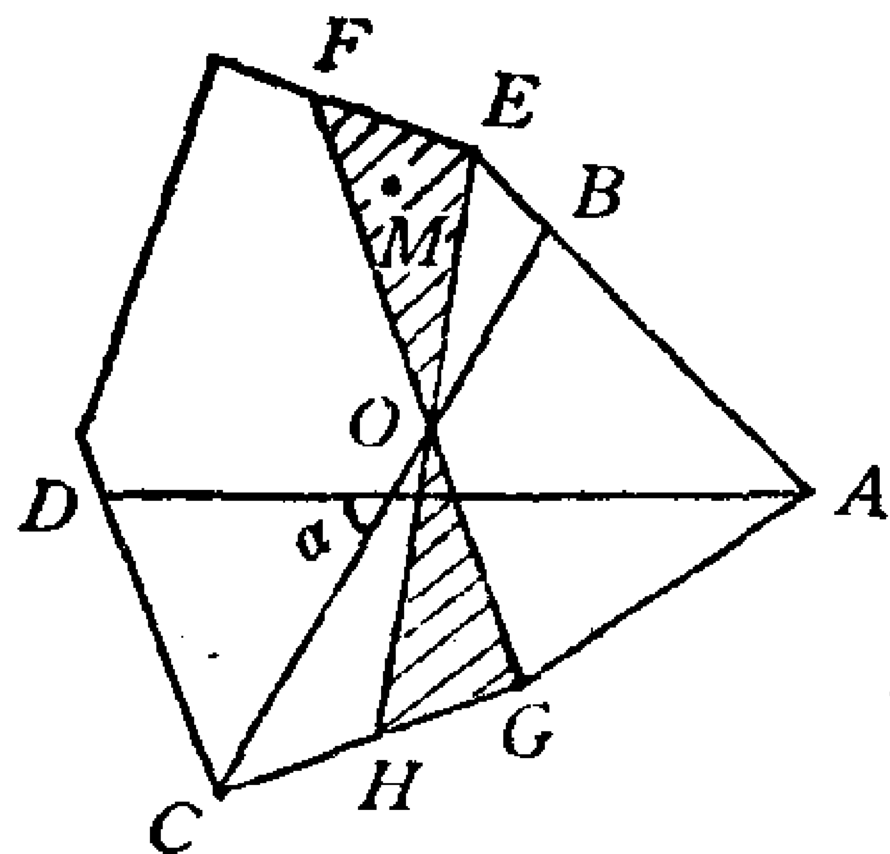


图140

附录

试题分类索引

本索引是根据解题方法和试题内容两个特征进行分类的．

1、归 纳 法

在证明与任意自然数有关的命题时，使用的方法是数学归纳法：如果验证当$n=1$时命题成立，假设对$n=k$命题成立，由此得出对$n=k+1$命题也成立，那么命题对一切自然数成立．归纳法还有另一种形式：如果验证当$n=1$命题成立，假设对一切$k<n$命题成立，由此得出对$k=n$命题也成立，那么命题对一切自然数成立．有时归纳法不是从$n=1$开始，而是从$n=0$或从某个$n=n_0$开始．归纳法原理等价于公理：在任何自然数的集合中有最小自然数（见第11题）．

归纳法的方法在证明过程中往往不是那么明显．例如用归纳法来证明等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

时，要先检验它对$n=1$成立，然后再进行如下计算（“归纳步骤”）：如果$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$，那么$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$．实质上可把这些步写在一起

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)$$
$$=1+(4-1)+(9-4)+\cdots+((n+1)^2-n^2)$$

$=(n+1)^2$.

№5, 15, 26, 36, 39, 52, 72, 76, 77, 90, 97, 100, 102, 110, 113, 120, 137, 142, 144, 148, 164, 176, 179, 181, 183, 193, 203, 210, 218, 223, 229, 231, 240, 246, 248, 260, 267, 345, 367, 396, 446₂₎.

关于多重二等分除法的试题有

№155, 200, 277, 474, 485.

2、整数、整除性

在关于整数的各种试题中利用了与整除性有关的基本概念和定理。每一个整数a可以除以一个自然数带有余数，即可表示为形式$a=mq+r$，其中q和r（余数）是整数，且$0\leqslant r<m$。

在任意m个相邻整数中恰好存在一个数，它能被m整除。如果a和b在除以m时有相同的余数，就说a和b关于模m可比，记为形$a\equiv b\ (mod\ m)$。

如果a和b是自然数且$a=bq+r\ (0\leqslant r<b)$，那么这两个数的最大公因子d等于b与r的最大公因子。反复利用这个结论，可以用一系列带余除法（也称为欧几里德算法）求出

$$a=bq+r,\ b=rq_1+r_1,\ r=r_1q_2+r_2,\ r_1=r_2q_3+r_3,$$
$$\cdots,\ r_{n-1}=r_nq_{n+1}+d,\ r_n=dq_{n+2}.$$

由此得出：存在整数x、y，使$d=ax+by$。特别地，如果数a和b互质，即没有大于1的公因子，那么存在整数x和y，使$ax+by=1$（参看第168题）。

每一个自然数可用唯一的方法表示为质数的乘积（算术基本定理）。质数的个数是无穷的。这个命题的证明以下列事实为基础：若干个质数的乘积与1之和有异于这些质数的公因子。

如果数b_1, b_2, $\cdots$, b_n两两互质，那么对于任意余数r_1, r_2, $\cdots$, r_n（$0\leqslant r_i<b_i$），存在数a，使得a除以b_i的余数等于r_i,

即$a \equiv r_i \pmod{b_i}$，$i=1, 2, \cdots, n$（中国余数定理）.

№3，9，16，30，36，42，46，48，51，59，68，74，85，88，89，93，102，107，122，137，141，162，190，233，254，258，260，288，306，316，322，352，360，371，386，411，416，426，436，445，449，456，465，479，495.

3、数字和记数法

在涉及自然数A的十进制记数法$A=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_1 10+a_0$的试题中（有时这种表示法记为$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}$）有各种各样的类型：整数的整除性、代数变换、估计．特别，能被3和9整除的数的特征以及下面这个更准确的解释是很有用的：$A=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_n a_0}$以及它的各位数字之和在除以9（或3)时有相同的余数（差

$$A-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$$
$$=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\cdots+a_1(10-1)$$

显然被9整除）．有时用q进制记数法来表示自然数A:

$$A=a_n q^n+a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1 q+a_0$$

其中a_i（$0 \leqslant a_i < q$，$i=1, 2, \cdots, n$）为这种记数法中的数字.

№ 3，21，43，54，85，88，93，122，132，139，141，142，144，148，168，175，197，201，244，291，294，297，329，354，396，430，439，502.

4、有理数和无理数

有理数a能表示成$a=m/n$（其中$m \in Z$，$n \in N$），也可表示成无限循环十进制（q进制）小数．无理数是十进制（q进制）的无限不循环小数．常把无理数$a+b\sqrt{d}$（其中a和b为有理数，d是一个不等于自然数平方的整数）与它的“共轭数”$a-b\sqrt{d}$一起研究，因为它们的和与乘积是有理数，所以$a \pm b\sqrt{d}$是整系

数的二次方程的根。

№ 94，114，257，268，303，356，370，379，422，477，503。

5、二次三项式、连续函数、图象与方程的根

在归结为研究二次函数$y=f(x)=ax^2+bx+c$的大多数试题中常要考虑它的图象。如果图象与Ox轴交于两个点（根）x_1和x_2，那么在x_1、x_2之间函数$y=f(x)$的符号与a的符号相反，而在区间$[x_1, x_2]$之外，函数值与a有相同的符号。同时，抛物线$y=f(x)$的顶点（它的横坐标等于两根之和的一半）对应于函数$y=f(x)$的极值点。如果$a>0$，则是极小值；如果$a<0$，则是极大值。

在一些问题中研究下面事实是有益的：如果在区间$[a, b]$上连续的函数$y=f(x)$在这个区间的端点上的符号不相同，那么方程$f(x)=0$在a、b之间至少有一个根。

№32，119，149，157，178，180，206，228，242，259，264，269，278，299，308，339，359，383，400，418。

6、多项式代数

以数a为根的多项式$P(x)$能被$x-a$整除，即$P(x)=(x-a)Q(x)$，其中$Q(x)$是比$P(x)$次数低1的多项式（同时，如果$P(x)$的系数为整数，则$Q(x)$的系数也是整数）。n次多项式至多有n个根（重根计算在内）。由此得出，如果次数不超过n的两个多项式$P(x)$和$Q(x)$在至少$n+1$个点上有相同的值，那么它们对应项的系数相等。

常用下列等式：

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$

$$x^{2m+1}+y^{2m+1}=(x+y)(x^{2m}-x^{2m-1}y+x^{2m-2}y^2-\cdots-$$

$xy^{2m-1}+y^{2m}$)

以及“牛顿二项式”公式

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n,$$

其中二项式系数

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot k},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

№ 16，24，38，51，125，142，162，217，242，251，258，325，347，439。

7、恒等式、方程和方程组

在解方程时，除通常的“中学”方法（代入、变量替换、变换）外，有时要考虑单调性。如果函数$y=f(t)$严格增加或严格减少，那么方程$f(g_1)=f(g_2)$与$g_1=g_2$等价。在解方程组时，几何解释、考虑对称性等常常很有用。

若干试题与多元线性关系式有关。

№ 38，63，98，146，189，194，243，276，292，353，357，364，414，460，467，484，509。

8、不 等 式

经常用到下列不等式

1）$|x+y|\leqslant|x|+|y|$，$|x-y|\geqslant|x|-|y|$；

2）$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$，$a\geqslant0$，$b\geqslant0$；

3）如果a_1，a_2，$\cdots$，a_n为非负数，那么

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

（几何平均与算术平均的哥西不等式）；

4）对任意a_1，a_2，$\cdots$，a_n，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n};$$

5）对于正数a、b，分式$\frac{c+d}{a+b}$界于$\frac{c}{a}$和$\frac{b}{d}$之间(见第219题)；

6）当$x>0$时，$\sin x<x$。

№19，56，95，109，113，118，127，128，130，134，169，172，187，203，208，212，232，264，267，278，279，299，308，311，319，325$_{1)}$，335，341，346，354，357，365，372，375，377，392，403，427，436，452，462，472，481，507。

9、迪里赫莱原理

如果在k个笼子中的兔子多于nk只，那么至少有一个笼子中的兔子多于n只。在各种问题中常用类似的想法来证明存在性。

我们举出若干个与“迪里赫莱原理”类似的命题，它们常用于几何和分析问题中：如果若干个图形的面积和小于S，那么不可能用它们来覆盖面积为S的图形；如果在长为1的线段上有若干条长度和为L的线段，那么存在一个点，它至多被$[L]$条这样的线段所覆盖；如果若干个数的算术平均值大于a，那么在这些数中至少有一个大于a。

№3，4，12，37，67，72，78，87，91，110，166，220，342，367，444，446。

10、组　合　论

计算有限集合元素的各种组合的基本方法是确定由不同条件给出的集合之间的对应关系。

特别地，由n个1和0组成的所有有序数组（共2^n组）的集合可以与n个元素集合的所有子集的集合相对应。

含有k个1的那样数组的集合与n元素集合的一切k元素子集的集合相对应。这样的数组共有

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\text{个}.$$

当$n=2$时，这是已知集合无序的“元素对”的个数：

$C_n^2=n(n-1)/2$. n个元素的(有序的)重排个数等于$n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$。

№ 52, 61, 76, 117, 136, 210, 231, 246, 301, 361, 439, 442, 469, 478, 501.

11、图、映 射

用点表示某个集合的元素且用线段把某些点连起来，我们就得到了离散数学研究对象的一种直观表示，它称为图；把点（集合的元素）称为图的顶点，线段（或者弧）称为图的边。能经由边组成的道路从一个顶点到达另一个顶点的图称为连通图。由边组成的封闭道路称为环。无环连通图（“树”）的顶点个数比边数多1（见第8题）。如果图的所有环的长度是偶数，那么它的顶点可以涂成两种颜色，使得同一颜色的顶点不被任何一条棱相连。这样的图称为双叶图。

如果在图上标上箭头，那么就得到了有向图。有限集合A到自身的任意映射f给出一个有向图，在它的每一个顶点$a\in A$上都有一个箭头指向$f(a)$（可能有由a到a的转头的箭头，这对应于映射f的不动点）。如果f相互单值，那么有向图分解成若干个环（和转头的箭头）。

一个复杂图的例子是电话通讯线路图（见第158题）。我们也研究棱或顶点被涂成若干种颜色、或者被标上数的图。

№ 8, 72, 79, 111, 123, 126, 163, 176, 183, 196, 240, 271, 290, 296, 310, 317, 421, 461.

12、奇偶性、涂色问题、网格问题

在关于图的问题中考虑奇偶性往往是重要的．例如，与奇数条棱相连的顶点的个数始终是个偶数（见第1题）．类似的想法在其它问题中也是有用的，例如在解“能否用1×2的多米诺骨牌覆盖缺少两个角格的8×8棋盘？”这样古典问题时也有用．这时，只要指出下面这一点就够了：每一个多米诺骨牌覆盖两个不同颜色的格子（普通国际象棋的涂色），而相对角上的两个格子有同一颜色．

№ 1，17，33，49，61，72，85，132，133，142，143，154，184，235，247，262，233，334，374，413，463．

除了奇偶性或涂色问题外，在关于格纸以及其它平面和空间的格点问题中也经常利用各种几何的、组合的思想及坐标方法．把格纸作为数值平面来研究是很有用的，在其上格子结点是有整数坐标的点；或者作为有p^2个结点的正方形，每个结点的坐标是除以p时的余数对（x，y）．

№ 91，96，111，181，199，207，208，229，265，275，295，304，314，349，362，397，416，425，433，444，446，457，499．

13、运算和不变量

有些问题要求解释能否借助于给定的运算把一个研究对象变为另一个研究对象，这时求不变量常常有效．不变量就是所研究对象的“数值特征”（或是在研究对象集合上取某种值的函数）．如果两个研究对象的不变量不相等，那么就不可能把一个研究对象变为另一个研究对象．在整数以及其它离散问题中不变量常常是除以2（或其它自然数）的余数（奇偶性）．

如果所施行的运算可逆，那么所研究的集合可划分为若干等

价类（如果一个研究对象能由另一个研究对象用所给运算得到，那么两个对象称为等价的）.

№ 105, 154, 214, 233, 260, 276, 321, 425.

在要求估计运算的次数或者证明不可能施行无限次运算（比如证明不存在“链”）的问题中，常常要找到一个函数，它随着运算次数的增加而增加（或减少）.

№ 5, 7, 21, 44, 151, 196, 271, 283, 409.

14、数字和整数的重排及变换、循环赛

在解由整数、字母、棋子组成的有限序列以及它们在圆周或表格中的重排问题时，常要同时考虑整除性、组合、估计、使用归纳法等.

№ 4, 37, 39, 87, 117, 143, 154, 156, 181, 200, 221, 224, 229, 231, 238, 275, 281, 300, 307, 321, 323, 337, 340, 345, 350, 385, 390, 391, 409, 413, 432, 435, 442, 456.

关于与体育紧密相关的得分和取名次的循环赛问题：

№ 28, 108, 126, 179, 218, 317, 441, 466.

15、平 面 几 何

几乎在每一届奥林匹克竞赛中都有传统的中学几何问题，而且试题还不那么简单. 我们指出下列几个常用的几何定理：弦切角等于它所夹的弧对的圆周角；从圆外一点引圆的切线和割线，切线长的平方等于这点到割线与圆交点的两条线段长的乘积；从圆外一点向圆所作的两条切线长相等；当且仅当四边形的两组对边的和相等时它才有内切圆；圆外切多边形的面积等于它的周长与圆半径乘积的一半.

№ 2, 13, 35, 50, 55, 58, 69, 84, 92, 103, 104, 106, 112, 114, 115, 129, 138, 145, 152, 159, 165, 166, 170, 177, 182, 195, 198, 209, 222, 237, 253, 305, 332, 378, 381, 393, 412, 428, 447, 450, 454, 471, 475, 480, 489, 496, 500, 505.

其它类型的几何问题还有：

1）正多边形

№ 20, 99, 103, 127, 226, 398, 408, 434, 443.

2）几何轨迹

№ 6, 12, 14, 18, 20, 31, 40, 60, 78, 82, 157, 202, 207, 213, 270, 424.

3）几何变换（旋转、平移、相似及其合成）

№ 6, 22, 45, 47, 73, 101, 112, 140, 147, 165, 182, 198, 205, 222, 253, 259, 298, 309, 315, 373, 399, 414, 460.

4）面积

№ 12, 13, 23, 29, 53, 55, 78, 106, 147, 152, 186, 204, 261, 255, 285, 312, 327, 363, 366, 384, 395, 415, 438, 458, 464.

16、立 体 几 何

解题时研究图形对平面(或者对直线)的投影常常是有效的。在这里我们要指出一个尚未收进中学课本的定理：在三面角中每一个平面角小于另外两个的和.

№ 53, 70, 80, 82, 104, 121, 150, 188, 234, 241, 255, 266, 299, 326, 348, 358, 394, 417, 461, 486, 497.

17、组 合 几 何

这个名称涉及到与排列、覆盖、不同图形的组合相关的各种各样的估计．这里要利用与图形在平面上（或在空间中）的位置有关的最一般的性质．其中约当定理的内容是：任意不自相交的闭折线把平面分成内、外两个部分；同时从内部区域一点到外部区域一点的任意路径都与这条折线相交；而每一个区域内的两点可以用不与折线相交的路径连接起来．我们还要回忆一下凸集的定义：如果一个集合内的任意两点连同连接这两点的线段仍包含在这个集合内，那么这样的集合称为凸集．图形的凸壳是包含这个图形的最小凸集；有限集合的凸壳是以某些所给点为顶点的多边形（在空间中是一个多面体）．

研究所给图形时常常要研究它的r邻域——与图形中点的最小距离小于r的点集。当且仅当两个图形的r邻域不相交时，两个图形（特别是点）的距离不小于$2r$（第12、81题）．

№ 27, 49, 53, 64, 86, 147, 155, 156, 157, 164, 188, 202, 211, 215, 226, 227, 229, 230, 235, 237, 249, 255, 277, 314, 324, 338, 351, 406, 448, 461, 473, 483, 498, 504, 508.

18、几何不等式、估计、极值

在进行估计以及用几何工具证明不等式时，最常用的定理是：三角形的一边小于其它两边之和；三角形的一个角小于、等于或大于90°，取决于它对边的平方小于、等于或大于两条邻边的平方和．线段在平面或者在直线的投影之长不大于这条线段的长；多边形在任意平面的投影的面积不大于多边形的面积．

№ 23, 29, 32, 41, 62, 70, 73, 78, 82, 84, 86, 104, 115, 121, 124, 127, 131, 134, 135, 140, 167, 185, 191, 192, 193,

202, 204, 206, 213, 222, 225, 261, 266, 269, 282, 290, 297, 299, 302, 318, 320, 334, 348, 355, 365, 368, 388, 394, 420, 431, 438, 468, 470, 488, 492, 493, 510.

19、向　　量

除了最标准的向量运算——加、减及乘外，还常利用数积 $\vec{u}\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$，其中$\alpha=\angle(\vec{u},\ \vec{v})$。如果$\vec{u}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{v}=(x_2,\ y_2)$，那么$\vec{u}\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$。

对于平面上（或空间）的任意n个点A_1，A_2，…，A_n存在唯一的点O（重心），使$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$。

№ 6, 13, 143, 193, 207, 222, 225, 234, 270, 274, 280, 293, 315, 336, 366, 373, 404, 434, 457.

20、关于数组和表格的估计与极值问题

在许多奥林匹克竞赛中常常遇到关于有限数组及直线上点的位置的比较问题，和、差以及其它与数组或表格有关的其他函数的估计问题。

№ 56, 77, 127, 232, 252, 283, 344, 354, 369, 377, 453.

在那些问题中，常用的方法有：

a）选择数组中的最大数或最小数（“极大原理”）

№ 5, 26, 44, 72, 109, 126, 128, 156, 160, 163, 202, 219, 243, 246, 248, 283, 337, 343, 380, 401, 409.

b）把数按某种次序排列

№ 34, 65, 75, 153, 245, 250, 346, 410.

21、数　　列

对于数列x_n，如果存在自然数t使$x_{n+t}=x_n$（$n\in N$），那么

x_n称为周期数列，t称为周期．在一些问题中还遇到递推数列x_n：$x_{n+1}=f(x_n)$（其中f为某一个函数），或者从第$k+1$项开始的每一项通过它的前k项来确定．例如裴波那契数列1，1，2，3，5，…，其中每一项等于前两项的和．在估计数列时常利用归纳法、“粗糙”估计法和考虑单调性．

№ 11，15，25，36，90，100，113，223，251，255，257，267，273，303，313，328，356，402，405，459．

如果对于任意 $\varepsilon>0$，总存在自然数N，使对一切$n>N$有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$，那么数a称为数列x_n的极限．

№ 239，268，300，389，451．

22、游戏、追及、策略和算法

在解关于利用一系列步骤而达到某一目的的问题时，特别是在要求解释在这样那样的游戏中谁能取胜的问题时，常要求写出策略、行动规则；在游戏问题（或“追逐”、“追及”问题）中同时还要证明在对手采取任何行动时所用的策略能保证取胜．

№ 10，57，60，71，83，91，110，116，125，168，174，199，206，242，250，256，262，283，330，376，455，476，482，487，494．

23、有趣的例子和结构

在许多问题中解题最困难的部分不是证明而是举出不平常的例子．

№ 123，156，202，208，230，231，244，257，263，300，371，398，401，416，423，444，446，456，460，490，506．

建立并研究例子的试题（常用归纳原理）有：

№ 64，144，158，183，200，210，238，272，281，405．

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□
□□=□□□□□□□□□□□□□
□□=300
SS□=11145519
□□□□=1991□10□□1□